

BHS

II K

20

264



BHS II K 20

IX





S e h r

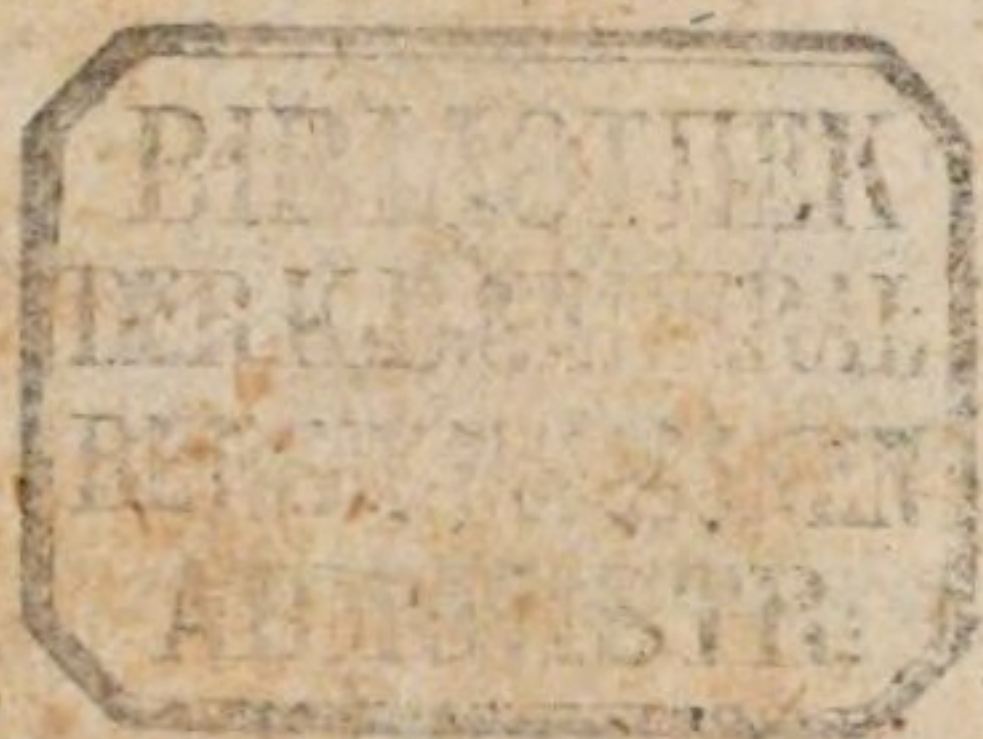
fafsliche und gröfstentheils

neue

T h e o r i e

d e r

unreinen kubischen Gleichungen.



Johann Georg Prändel,

Professor der Mathematik, der Physik, der Naturlehre und
des Geschäftsstyls an der königlichen Pagerie, wie auch
Ehrenmitgliede der königlich baierischen Akademie der
Wissenschaften in München.

München,

bey Joseph Lindauer

1809.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

V o r r e d e.

Daß die unreinen kubischen Gleichungen, oder wie sie sonst noch genennt werden, die unreinen Gleichungen vom dritten Grade, zu den schwersten Materien der Elementaralgebra gehören, braucht für Männer, die auch nur mittelmäßige Einsichten in diesen Theil der Mathematik haben, nicht mehr erwiesen zu werden. Denn gerade diese Gleichungen sind es, die den Uebergang von der gemeinen zur höhern Algebra ausmachen. — Eben so richtig ist auch nebenher die Bemerkung, daß in den wenigsten Lehrbüchern der Mathematik etwas Befriedigendes darüber vorkömmt. Ich handelte sie zwar in meiner größern Algebra mit etwas mehr Vollständigkeit ab, als ich sie in den gewöhnlichen Anleitungen hierüber bis dahin angetroffen hatte; aber ich bin in dieser Hinsicht nicht mehr so ganz mit mir selbst zufrieden. — Als daher im vorigen Sommer zwey meiner fleißigsten und fähigsten Privatschüler,

Max von Schenk, und Karl von Wiebeking unausgesetzt in mich drangen, ich möchte ihnen einen vollständigen Unterricht in den kubischen Gleichungen ertheilen, so entschloß ich mich aus Mangel eines hierzu schicklichen Leitfadens selbst ein kleines Heft darüber auszuarbeiten, und das Ganze meiner Methode gemäß mit passenden Beyspielen zu beleuchten. Der Weg, den ich zur Auflösung der vielen hierin aufgestellten kubischen Probleme eingeschlagen habe, ist noch neu und unbetreten, aber äußerst leicht, und eben deswegen allgemein anzuempfehlen. — Nach der Hand ließ ich diesen Aufsatz ein paarmal noch die kritische Feile empfinden, und übergab ihn zum Drucke, in der Hoffnung, daß ich jedem, der sich mit den kubischen Gleichungen etwas näher bekannt zu machen wünscht, keinen unangenehmen Dienst werde erwiesen haben.

München den 25. März 1809.

Der Verfasser.

T h e o r i e

der

unreinen kubischen Gleichungen.

§. 1.

Was man unter einer unreinen kubischen Gleichung eigentlich zu verstehen habe.

Der Ausdruck rein kubisch deutet bey einer algebraischen Gröfse, folglich auch bey einer Gleichung, an, dafs es verstattet sey, aus ihr die Kubikwurzel vollkommen auszuziehen. Geht diese Ausziehung nicht an, dann heifst sie, Kraft des Gegensatzes, unrein kubisch. — Diese Erklärung ist also völlig analog mit der der unrein quadratischen Gröfsen oder Gleichungen.

§. 2.

Karakteristische Merkmale einer zusammengesetzten rein kubischen Gröfse.

Soll eine Kubikwurzel aus 2 Gliedern bestehen, so darf deren Kubus, gemäß dem binomischen Gesetze: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$, nicht mehr und nicht weniger als 4 Glieder zählen, und selbst diese 4 Glieder müssen sich genau unter die angeführte Form bringen lassen. Jeder algebraische Aus-

druck also, der aus dem Kubus des einen Theils, aber nicht zugleich auch aus dem dreyfachen Quadrate dieses einen Theiles in den zweyten multipliziert, dann aus dem zweyfachen Quadrate des zweyten Theils in den ersten multipliziert, und aus dem Kubus des zweyten Theils besteht, ist nothwendig eine unreine kubische Grösse. Es hat demnach eine jede zusammengesetzte kubische Grösse ein quantitatives und ein qualitatives Merkmal ihrer Reinheit oder Unreinheit.

§. 3.

Nähere Definition einer unreinen kubischen Gleichung.

Eine unreine kubische Gleichung ist deshalb diejenige, wo neben dem Kubus der unbekannten Grösse auch noch niedrigere Würden derselben vorkommen, ohne daß sich die Kubikwurzel genau ausziehen läßt, wie etwa $x^3 + 6x^2 - 8x = 10$ oder $y^3 - 5y = 12$ oder auch $3z^3 - z^2 + z = 60$.

§. 4.

Größere Sphäre dieser Art Gleichungen als die der unreinen quadratischen.

Daraus geht unverkennbar hervor, daß das Gebieth der unreinen kubischen Gleichungen schon von dieser Seite sich ungleich weiter ausdehnen müsse, als das der unreinen quadratischen. Bey diesen kann die unbekannte Grösse neben ihrem Quadrate nur noch einmal, nämlich in der ersten Würde erscheinen: bey den kubischen Gleichungen hingegen sind 3 Fälle möglich. Es kann nämlich neben den Kubus

der unbekannten Gröſſe, das Quadrat derselben, oder die erste Würde, oder die erste und zweyte Würde zugleich vorkommen. Algebraisch läßt sich die Sache allgemein unter folgende 3 Formen bringen

$$1. \quad x^3 \pm m x^2 = q$$

$$2. \quad x^3 \pm p x = q$$

3. $x^3 \pm m x^2 \pm p x = q$, während dem bey den unrein quadratischen Gleichungen die einzige Form $x^2 \pm p x = q$ den ganzen Umfang derselben in sich begreift. Indefs genügt auch hier die einzige Formel $x^3 \pm m x^2 \pm p x = q$, um alle möglichen Fälle auszudrücken, wenn m und p zuweilen auch Null bedeuten, unter welcher Bedingung das ganze Glied, welches mangeln soll, nothwendig hinausfällt.

§. 5.

Eintheilung der unreinen kubischen Gleichungen.

Sämmtliche unreinen kubischen Gleichungen zerfallen in 2 Klassen, nämlich in die ergänzbaren und unergänzbaren. Da sich die unreinen quadratischen Gleichungen alle ohne Ausnahme ergänzen lassen, so konnte dort diese Eintheilung nicht Platz greifen.

§. 6.

Seltenheit und Kennzeichen einer ergänzbaren kubischen unreinen Gleichung.

Ergänzbare unreine Gleichungen vom dritten Grade, die sich nämlich auf die Form bringen lassen, $x^3 \pm 3 b x^2 \pm 3 b^2 x \pm b^3$, sind eine äußerst seltene Erscheinung. Man erkennt sie daraus, wenn beym

wirklichen Wurzelaustrage bloß das letzte Glied $\pm b^3$ mangelt, welche sich als eine bekannte GröÙe beyderseits leicht addiren, oder auch nach Umständen subtrahiren läßt. Dadurch, daß manchmal das fehlende Glied beyderseits subtrahirt werden muß, unterscheidet sich die Behandlung unreiner ergänzbarer Gleichung des dritten Grades auf ein neues von jener des zweyten Grades, wo einzig nur Addition des mangelnden Quadrats Platz haben kann.

§. 7.

Wie viele Wurzeln aus jeder kubischen Gleichung hervorgehen müssen, und wie diese Wurzeln beschaffen sind.

Da schon die quadratischen Gleichungen, sie mögen rein oder unrein seyn, zwey Wurzeln enthalten, so folgt, daß jede kubische Gleichung drey Wurzeln haben müsse. Oft sind alle 3 möglich; oft einige unmöglich; oft sind sie rational (völlig bestimmbar); oft irrational; oft positiv; oft negativ.

§. 8.

Jedesmalige Bestimmung der 3 Kubikwurzeln,

Um für jede reine Gleichung des dritten Grades die 3 Wurzeln ausfindig zu machen, ziehe man zuerst die Kubikwurzel auf dem gewöhnlichen Wege aus. Man bringe sowohl die kubische als die Wurzelgleichung auf Null, und dividire die erste durch die zweyte. Daraus geht nun sehr natürlich eine neue Nullgleichung als Quotient hervor, die allemal um einen Grad niedriger als die kubische,

das heisst, eine quadratische seyn wird. Die gehörige Behandlung derselben erzeugt 2 Quadratwurzeln. Folglich hat man in allen 3 Wurzeln erhalten.

§. 9.

Rückweisung auf die quadratischen Gleichungen.

Selbst bey den quadratischen Gleichungen, sie mögen rein oder unrein seyn, können auf die eben gezeigte Weise die beyden Wurzeln ausgemittelt werden. Wir wollen zuerst die reine Gleichung $x^2 = 49$ vor die Hand nehmen. Die erste Wurzel davon ist $x = 7$. Es heissen daher die Nullgleichungen: $x^2 - 49 = 0$ und $x - 7 = 0$. Man dividire sie durch einander:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 49 \quad | \quad x + 7 = 0 \\
 (x - 7) \quad | \\
 \hline
 x^2 - 7x \\
 - \quad + \\
 \hline
 7x - 49 \\
 (x - 7) \\
 7x - 49 \\
 - \quad + \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Stellt man endlich in der Nullgleichung $x + 7 = 0$ das x allein, so kömmt die zweyte Wurzel $x = -7$ zum Vorschein.

§. 10.

Ausdehnung der nämlichen Behauptung auf die unreinen quadratischen Gleichungen.

Auf die nämliche Weise lassen sich auch die beyden Quadratwurzeln in jeder unreinen Gleichung

vom zweyten Grade bestimmen. Denn es sey die Aequation gegeben

$$x^2 - 13x = -36.$$

Man behandle sie wie gewöhnlich, und lasse anfänglich bloß die positive Wurzel gelten

$$x^2 - 13x = -36$$

$$\text{Ergänzt} \quad + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = + \frac{169}{4}$$

$$x^2 - 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\checkmark \quad x - \frac{13}{2} = \frac{5}{2}$$

$$+ \frac{13}{2} \quad + \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{18}{2} = 9$$

Es wäre demnach 9 eine Wurzel für x.

Nun bringe man beyde Gleichungen auf Null, so erscheint $x^2 - 12x + 36 = 0$ und $x - 9 = 0$. Man dividire sie durch einander, wie folgt:

$$\begin{array}{r} x^2 - 13x + 36 \quad | \quad x - 9 = 0 \\ (x - 9) \quad | \\ \hline x^2 - 9x \\ - \quad + \end{array}$$

$$- 4x + 36$$

$$(x - 9)$$

$$- 4x + 36$$

$$0$$

Wird demnach in der Gleichung $x - 4 = 0$ das x allein gestellt, so geht hervor $x = 4$. Die beyden Quadratwurzeln sind also 9 und 4, wie die gewöhnliche Behandlung sie gegeben hätte; denn es hätte eigentlich oben so heissen müssen:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 & = & \frac{25}{4} \\ \checkmark \quad x - \frac{13}{2} & = & \pm \frac{5}{4} \\ \quad + \frac{13}{2} & \quad + \frac{13}{2} & \end{array}$$

$x = 9$, wenn $+$ gilt,
und $x = 4$, wenn $-$ gilt.

§. II.

Uebergang auf die unreinen Gleichungen des dritten Grades.

Der Uebergang auf die unreinen kubischen Gleichungen soll uns folgende Frage machen: Welche kubische Wurzeln hat die Zahl 8? — Bekanntlich ist die erste Wurzel, die sich unmittelbar ergibt $= 2$; Nun dividire man die Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch $x - 2 = 0$, so ergeben sich auch mittelbar die beyden andern Wurzeln, wenn aus der neuen Nullgleichung die Quadratwurzel gezogen wird.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 8 \quad | \quad x^2 + 2x + 4 = 0 \\
 (x - 2) \quad | \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 2x^2 - 8 \\
 (x^2 - 2) \\
 \hline
 2x^2 - 4x \\
 \hline
 4x - 8 \\
 (4 - 2) \\
 \hline
 4x - 8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Es ist daher $x^2 + 2x = -4$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 1 = -3 \\
 \sqrt{\quad} \quad x + 1 = \pm \sqrt{-3} \\
 \text{vers. } x = -1 \pm \sqrt{-3}
 \end{array}$$

Diesemnach hat die Zahl 8 folgende 3 Kubikwurzeln:

1. $x = 2$
2. $x = -1 + \sqrt{-3}$
- und 3. $x = -1 - \sqrt{-3}$.

Da aber die zweyte und dritte Wurzel unmöglich oder eingebildet (Radices imaginariae) sind, so kann nur die erste eine wahre oder wirklich anwendbare Wurzel aus 8 seyn; die übrigen beyden nennt man falsche oder taube Wurzeln.

§. 12.

Beweis, daß demungeachtet jede taube Wurzel die Zahl 8 hervorbringt, wenn man sie zum Kubus erhebt.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Erhebung sowohl der Wurzel $-1 + \sqrt{-3}$ als $-1 - \sqrt{-3}$ zur dritten Würde so gut die Zahl 8 giebt, als wenn man 2 selbst kubirt. Es dürfen nur folgende Multiplikationen in Erwägung gezogen werden.

I.	II.
$-1 + \sqrt{-3}$	$-1 - \sqrt{-3}$
$-1 + \sqrt{-3}$	$-1 - \sqrt{-3}$
-----	-----
$1 - \sqrt{-3}$	$1 + \sqrt{-3}$
$- \sqrt{-3} - 3 - 3$	$+ \sqrt{-3} - 3 - 3$
-----	-----
$1 - 2\sqrt{-3} - 3 - 3$	$1 + 2\sqrt{-3} - 3 - 3$
oder $-2 - 2\sqrt{-3}$	oder $2\sqrt{-3} - 2$
$-1 + \sqrt{-3}$	$-1 - \sqrt{-3}$
-----	-----
$2 + 2\sqrt{-3}$	$-2\sqrt{-3} + 2$
$-2\sqrt{-3} + 6$	$+ 6 + 2\sqrt{-3}$
-----	-----
8.	8.

§. 13.

Aehnliche Behandlung einer ergänzbaren unreinen kubischen Gleichung.

Aufgabe. Es soll untersucht werden, ob die kubische Gleichung $x^3 - 15x^2 + 75x = 1125$ ergänzbar sey oder nicht; und im Bejahungsfalle sind die 3 Wurzeln wirklich zu bestimmen.

Auflösung. Man schicke sich an, aus der ersten Seite der Gleichung die Kubikwurzel herauszu ziehen, um dadurch zu erforschen, welche Gröfse mangelt, oder um welche sie zu groß ist. Ist nun diese Gröfse eine Zahl, die kein x als Faktor mit sich führt, und gehen die übrigen Glieder alle rein auf, so kann die Gleichung gar leicht ergänzt werden.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 15x^2 + 75x \quad | \quad x - 5 \\
 -x^3 \\
 \hline
 -15x^2 + 75x \\
 (3x^2) \\
 \hline
 -15x^2 \\
 +75x \\
 +125 \\
 \hline
 -15x^2 + 75x - 125 \\
 + \quad \quad + \\
 \hline
 +125
 \end{array}$$

Da nun alle Glieder da sind, bis auf die Zahl 125, so muß dieses Glied beyderseits subtrahirt werden, und die Wurzel läßt sich ohne weiters ausziehen.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 15x^2 + 75x = 1125 \\
 -125 \quad -125 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 1000$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{} \\
 \text{vers.} \quad x - 5 = 10 \\
 \quad \quad \quad x = 15.
 \end{array}$$

Es wäre also 15 eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Nun bestimme man auf die oben §. II. gezeigte Weise die beyden andern Wurzeln.

$$x^3 - 15x^2 + 75x - 1125 = 0$$

durch

$$x - 15 = 0 \text{ dividirt,}$$

$$\text{gibt } x^2 + 75 = 0$$

$$\text{vers. } x^2 = -75$$

$$\sqrt{} \quad x = \pm \sqrt{75}$$

Es sind demnach die beyden letzt gefundenen Wurzeln platterdings unmöglich. Jedoch halten sie eben so gut die Probe aus, wie oben die zwey unmöglichen Wurzeln aus 8. Man darf nur jede derselben auf der linken Seite der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 75x$ überall gehörig substituiren, so muß die Zahl 1125 als entsprechender Werth herauskommen. Man nehme zuerst die unmögliche Wurzel $+\sqrt{-75}$ vor die Hand. $(\sqrt{-75})^3 - 15(\sqrt{-75})^2 + 75\sqrt{-75}$ oder was eines ist: $\sqrt{-75} \times -75 \times -75 - 15 \times -75 + 75\sqrt{-75}$. Es entsteht also $-75\sqrt{-75} + 1125 + 75\sqrt{-75} = 1125$.

Das nämliche giebt auch die zweyte unmögliche Wurzel $-\sqrt{-75}$; denn

$$\left[-\sqrt{-75}\right]^3 - 15\left[-\sqrt{-75}\right]^2 + 75\left[-\sqrt{-75}\right]$$

giebt durch die Entwicklung:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{-75} \times -75 \times -75 - 15 \times -75 - 75\sqrt{-75} \\ & = 75\sqrt{-75} + 1125 - 75\sqrt{-75} = 1125. \end{aligned}$$

§. 14.

Ein hieher gehöriges Problem.

Ich denke mir eine Zahl, sagte jüngsthin ein Mathematiker in einer gelehrten Gesellschaft, wenn ich 4 davon hinweg nehme, das übrige durch 12 multiplizire, das Produkt vom Quadrat dieser gedachten Zahl abziehe, und den Rest noch einmal mit ihr multiplizire, so erscheint 1395. Wie heisst diese Zahl?

Auflösung. Die Zahl sey z , daher ohne weiters die Gleichung:

$$z \left[z^2 - (z - 4) 12 \right] = 1395.$$

Entwickelt. $z^3 - 12 z^2 + 48 z = 1395.$

Man untersuche ihre Ergänzzbarkeit durch Ausziehung der Kubikwurzel.

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 12 z^2 + 48 z \quad | \quad z - 4 \\
 \underline{- z^3} \\
 - 12 z^2 + 48 z \\
 (3 z) \\
 \underline{- 12 z^2} \\
 + 48 z \\
 - 64 \\
 \hline
 - 12 z^2 + 48 z - 64 \\
 + \\
 \hline
 + 64.
 \end{array}$$

Es ist also die linke Seite der Gleichung um die Zahl 64 zu groß. Man muß deswegen so ergänzen, daß man beyderseits 64 abzieht.

$$\begin{array}{r} z^3 - 12z^2 + 48z = 1395 \\ \text{Ergänzt} \quad \quad \quad -64 - 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 1331 \\ \sqrt[3]{} \quad \quad \quad z - 4 = 11 \\ \text{vers.} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad z = 15. \end{array}$$

Eine Wurzel ist demnach 15. — Wie sehen die andern beyden Wurzeln aus? Dieß soll auf der Stelle untersucht werden!

Die beyden Nullgleichungen sind

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 1395 = 0$$

$$\text{und} \quad z - 15 = 0$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 12z^2 + 48z - 1395 \quad | \quad z^2 + 3z + 93 = 0 \\ (z - 15) \\ \hline z^3 - 15z^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3z^2 + 48z \\ (z - 15) \\ \hline 3z^2 - 45z \\ \hline \end{array}$$

$$93z - 1395$$

$$(z - 15)$$

$$\begin{array}{r} 93z - 1395 \\ \hline \end{array}$$

0

Folglich hat man die quadratische unreine Gleichung

$$z^2 + 3z = -93$$

$$\begin{array}{r} \text{Ergänzt} \quad + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$z^2 + 3z - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{163}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \quad z + \frac{3}{2} = \frac{\pm \sqrt{-363}}{2}$$

$$\text{vers.} \quad z = \frac{-3 + \sqrt{-363}}{2}$$

$$\text{und} \quad z = \frac{-3 - \sqrt{-363}}{2}$$

Beyde Wurzeln sind unmöglich. Es ist demnach nur die Wurzel 15 brauchbar.

Probe hievon.

Zieht man von 15 die Zahl 4 ab, so bleibt 11, dieß mit 12 multipliziert, giebt das Produkt 132, Da nun das Quadrat von 15 = 225 ist, so wird die Differenz zwischen diesem Quadrat und dem obigen Produkte 225 = 132 — 93 seyn, welche, wenn man sie durch 15 multipliziert, wirklich 1393 auswirft. Also ist 15 die gedachte Zahl.

§. 15.

Ein ähnliches Problem zur Uebung aufgegeben.

In der Mitte des vorigen Jahrhunderts war auf der hohen Schule zu Bologna ein äußerst gelehrtes Frauenzimmer, Agnesi mit Namen, öffentliche Professorin der Mathematik. Ihr Ruf erscholl weit und breit. Ein Verehrer des weiblichen Geschlechts in einer benachbarten Stadt Italiens beschloß auf der Stelle, mit ihr einen freundschaftlichen Briefwechsel zu unterhalten. Er war aber so neugierig, daß er sie schon in seinem ersten Schreiben um ihr Alter

fragte. Die Antwort hierauf lautete so: „Mein Herr! wenn Sie die Zahl 931 durch mein Alter dividiren, und zum Quotienten 3 addiren, so kömmt eben so viel heraus, als wenn sie vom Quadrat meines Alters das Alter selbst dreymal abziehen. Wie muß sich der Neugierige das Räthsel lösen?“

§. 16.

Anwendung der bisherigen Lehre von den ergänzbaren unreinen Gleichungen des dritten Grades auf die Theilung der Kegelrumpfe.

Unlängst gab ich mir das leicht scheinende, aber in der That ziemlich schwere Problem auf: „Man kennt von einem Kegelrumpfe, z. B. von einem entgipfelten Holzstamme, den grossen und kleinen Durchmesser, und die Länge desselben. Er soll nun so irgendwo abgeschnitten werden, dafs man genau zwey Hälften erhält. In welcher Entfernung vom kleinen Ende des Baumes muß der Schnitt gemacht werden?“

Dieses Problem ist meines Wissens noch von Niemanden aufgelöset worden. Ich machte mich deshalb daran, nannte die beyden Durchmesser allgemein d und D , und die Länge $= l$. Ein ziemlich weitläufiger Kalkul, wovon ich seiner Zeit Rechenschaft ablegen werde, führte mich endlich nach stereometrischen Gründen auf die kubisehe Gleichung.

$$x^3 + \frac{3dlx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} = \frac{l^3 [D^2 + dD + d^2]}{2(D-d)^2}$$

Hier ist nun der Ort, zu untersuchen, ob diese Gleichung ergänzbar sey, oder nicht. Man schicke sich also wieder an, die Kubikwurzel auszuziehen.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + \frac{3dlx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} \quad | \quad x + \frac{dl}{D-d} \\
 -x^3 \\
 \hline
 \frac{3dlx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} \\
 (3x^2) \\
 \hline
 \frac{3dlx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} + \frac{d^3l^3}{(D-d)^3} \\
 \hline
 \frac{d^3l^3}{(D-d)^3}
 \end{array}$$

Man sieht hieraus augenscheinlich, daß sich diese unreine kubische Gleichung wirklich ergänzen läßt, wenn man beyderseits die Gröfse $\left(\frac{dl}{D-d}\right)^3$ addirt.

Daher

$$\begin{aligned}
 x^3 + \frac{3dl}{D-d} x^2 + \frac{3d^2l^2}{(D-d)^2} x^2 + \frac{d^3l^3}{(D-d)^3} &= \\
 &= \frac{l^3(D^2 + dD + d^2)}{2(D-d)^2} + \frac{d^3l^3}{(D-d)^3}
 \end{aligned}$$

Es ist hier weiter nichts zu thun, als diese Gleichung, ehe man die Wurzel auszieht, rechter Hand durch Verschmelzung abzukürzen. Man multiplizire daher den ersten Bruch unten und oben durch $(D-d)$ und den zweyten durch 2, so erhalten sie gleiche Nenner.

$$\begin{array}{r}
 D^2 + dD + d^2 \\
 D - d \\
 \hline
 D^3 + dD^2 + d^2D \\
 - dD^2 - d^2D - d^3 \\
 \hline
 D^3 - d^3
 \end{array}$$

Folglich kömmt:

$$\begin{aligned}
 x^3 + \frac{3dx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} + \frac{d^3l^3}{(D-d)^3} \\
 = \frac{D^3l^3 - d^3l^3 + 2d^3l^3}{2(D-d)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{oder } x^3 + \frac{3dx^2}{D-d} + \frac{3d^2l^2x}{(D-d)^2} + \frac{d^3l^3}{(D-d)^3} \\
 = \frac{l^3(D^3 + d^3)}{2(D-d)^3}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{x} + \frac{dl}{D-d} = \frac{l}{D-d} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(D^3 + d^3)}$$

$$\text{vers. } x = l \left[\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(D^3 + d^3)} - d}{D-d} \right]$$

§ 17.

Berechnung irgend eines praktischen Falles mittels der so eben gefundenen Formel.

Zwey Leerhäusler kaufen einen Baumstamm der 38 Schuh lang ist, und am grossen Ende $2\frac{3}{4}$, so wie am kleinen Ende $1\frac{1}{8}$ Schuh, im Durchmesser hält. Da nun jeder gleich viel an Geld erlegt hat, so wollen sie ihn auch so absägen, dafs jeder gleich viel davon nach Hause bringt. Wie weit mufs sich der Schnitt vom kleinen Ende entfernen?

Auflös. Hier ist $l = 38$

$$D = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{und } d = 1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

Diese Zahlen nun in der Formel:

$$x = 1 \frac{\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2} (D^3 + d^3)} - d \right]}{D - d} \text{ substituirt,}$$

$$\text{gibt: } x = 38 \frac{\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{1331}{64} + \frac{729}{512} \right)} - \frac{9}{8} \right]}{\frac{22}{8} - \frac{9}{8}}$$

$$= 38 \left[\sqrt[3]{\frac{5688,5}{512}} - \frac{9}{8} \right] : \frac{8}{13} = \frac{38 \times 8,851 \dots}{13}$$

$= 25,872$ Schuh, die Entfernung des Schnitts vom kleinen Orte.

§. 18.

Einen Schritt in der Theorie weiter.

Ehe wir zur Behandlung der unergänzbaren kubischen Gleichungen schreiten, müssen noch einige Gesetze und Eigenschaften derselben vorangeschickt werden. Man muß z. B. zeigen, welche Form man der Gleichung zu geben habe; wie man die Wurzeln, ohne sie zu kennen, multipliciren und dividiren könne; wie im Erforderungsfall das Quadratglied aus der Gleichung hinauszuschaffen sey; wodurch eine kubische Gleichung von Brüchen befreyt werde; welche Gesetze in den Koefficienten liegen; wie diese Gesetze auf die Auflösung der kubischen Gleichungen anzuwenden sind, und so weiter.

§. 19.

Welche Formen man jeder kubischen Gleichung zu geben habe.

Vor allem ist nothwendig, dafs die gegebene kubische Gleichung gut geordnet, und dann auf Null gebracht werde. Eine Gleichung gut ordnen heifst aber nichts anders als die Glieder derselben so auf einander folgen lassen, dafs immer die höhern Würden der unbekannten Gröfse den niedrigeren vorgehen, und dafs der Kubus im ersten Gliede positiv oder bejaht und rein, das ist, ohne Koefficienten und Nenner, erscheint. Die folgenden 3 Beyspiele werden diefs anschaulich machen.

Erstes Beyspiel.

$$9x - 36x^2 + 3x^3 = 846.$$

$$\begin{array}{l} \text{Geord.} \quad 3x^3 - 36x^2 + 9x - 846 = 0 \\ : 3 \quad \quad x^3 - 12x^2 + 3x - 282 = 0. \end{array}$$

Zweytes Beyspiel.

$$4y^3 - 19 = 9y^2 - 2y$$

$$\begin{array}{l} \text{Geord.} \quad 4y^3 - 9y^2 + 2y - 19 = 0 \\ : 4 \quad \quad y^3 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{19}{4} = 0. \end{array}$$

Drittes Beyspiel.

$$z - \frac{z^3}{5} = 28$$

$$\begin{array}{l} \text{Geord.} \quad \frac{z^3}{5} - z + 28 = 0 \\ \quad \quad \quad 5 \end{array}$$

$$\times 5 \quad z^3 - 5z + 140 = 0.$$

§. 20.

Die Wurzeln zu vermehren oder zu vermindern.

Die Wurzeln einer jeden gegebenen kubischen Gleichung, die gut geordnet ist, lassen sich nach Belieben um eine bestimmte Gröfse vermehren oder vermindern, obgleich ihr Werth noch unbekannt bleibt. Man habe z. B. die gutgeordnete Gleichung vor sich:

$$x^3 - 4x^2 + 10x - 336 = 0.$$

Man wünscht die Wurzeln um 2 kleiner, als hier ihr Werth sich auswerfen würde.

Es werde demnach $x - 2 = y$ gesetzt, folglich ist $x = y + 2$, und es kann die ganze Gleichung Glied für Glied in y gegeben werden, wie hier folgt:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & (y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ - 4x^2 & = & - 4(y + 2)^2 = - 4y^2 - 16y - 16 \\ + 10x & = & 10(y + 2) = + 10y + 20 \\ - 336 & = & - 336 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 10x - 336 & = & y^3 + 2y^2 + 6y - 324 = 0. \end{array}$$

Diese Vermehrung und Verminderung der Wurzel wird in der Folge manchmal mit Nutzen angewendet werden können.

§. 21.

Multiplication und Division der unbekannten Wurzeln.

Eben so leicht lassen sich die Wurzeln der kubischen Gleichungen nach Gefallen multipliciren oder

dividiren, ehe man noch ihren Werth erforscht hat. Um ein Exempel hievon zu haben, multiplicire man in der oben vorgelegten Gleichung $x^3 - 4x^2 + 10x - 336 = 0$ die Wurzel durch die Zahl 3. Es ist sohin in dieser Beziehung $y = 3x$, und wechselseitig $x = \frac{y}{3}$. Daraus geht folgende Zusammensetzung einer neuen Gleichung hervor:

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & \frac{y^3}{27} \\
 - 4x^2 & = & - \frac{4y^2}{9} \\
 + 10x & = & + \frac{10y}{3} \\
 - 336 & & - 336 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + 10x - 336 & = & \frac{y^3}{27} - \frac{4y^2}{9} + \frac{10y}{3} - 336 = 0. \\
 \times 27 & & y^3 - 12y^2 + 90y - 9072 = 0.
 \end{array}$$

Durch ein ähnliches Verfahren werden auch die Wurzeln einer kubischen Gleichung dividirt. Es soll z. B. die Wurzel der vorhin gegebenen Gleichung $x^3 - 4x^2 + 10x - 336 = 0$ halbirt werden. Daher $\frac{x}{2} = y$ und $x = 2y$.

Dies giebt folgende Zusammenstellung

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & 8y^3 \\
 - 4x^2 & = & - 16y^2 \\
 + 10x & = & + 20y \\
 - 336 & = & - 336 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + 10x - 336 & = & 8y^3 - 16y^2 + 20y - 336 = 0. \\
 8 : & & y^3 - 2y^2 + \frac{5}{2}y - 42 = 0.
 \end{array}$$

§. 22.

Wie gebrochene Koefficienten aus kubischen Gleichungen entfernt werden können.

Gebrochene Koefficienten sind kein geringes Hinderniß bey Auflösung kubischer Gleichungen. Es ist daher eine Wohlthat für den Algebraisten, sie zu entfernen, ohne die Aequation zu stören. Man bedient sich hiezu folgendes praktischen Kunstgriffes. Es wird vor allem der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller in der Gleichung vorkommenden Brüche gesucht. Dann erhebt man denselben zur 1ten, 2ten und 3ten Würde, und multiplicirt in der nämlichen Ordnung das erste, zweyte, dritte und vierte Glied damit. Hierdurch entsteht eine neue Gleichung, worin die Wurzeln so vielmal gröfser sind, als der gemeinschaftliche kleinste Nenner beträgt. Dieser Umstand macht es nothwendig, die Würden der unbekannten Gröfse durch einen andern Buchstaben auszudrücken; damit die gefundenen Wurzeln am Ende berichtigt werden können. Ein Paar Beyspiele mögen die Sache ins Klare setzen. Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 760 = 0.$$

Der erste Hinblick auf sie entdeckt, dafs die Zahl 4 der kleinste gemeinschaftliche Nenner sey. Die 1te, 2te und 3te Würde von 4 sind bekanntlich 1, 4, 16 und 64. Mit diesen Zahlen die 4 Glieder der Nullgleichung multiplicirt, giebt

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & - & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{3}{4}x & - & 760 & = & 0 \\ 1 & & 4 & & 16 & & 64 & & \\ \hline x^3 & - & 2x^2 & + & 12x & - & 48640 & = & 0. \end{array}$$

Weil aber x seinen Werth nicht mehr beybehält, sondern 4mal größer geworden ist, so führe man y in die Gleichung ein, und erinnere sich dabey, daß $y = 4x$ bedeute. Daher die eigentliche Gleichung:

$$y^3 - 2y^2 + 12y - 48640 = 0.$$

Die aufsteigenden Würden des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners erlauben es manchmal, daß bloß ein Theil desselben genommen werden darf. So ist z. B. in der vorliegenden Gleichung schon die Hälfte von 4 erklecklich, um die Brüche wegzubringen; denn

$$\begin{array}{r} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 760 = 0 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \\ y^3 - y^2 + 3y - 6080 = 0, \end{array}$$

wo $y = 2x$ ist.

Die Aequation des zweyten Beyspiels habe diese Gestalt:

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{17}{2} = 0.$$

Der kleinste allgemeine Nenner wäre freylich wider 24, aber wenn man bedenkt, daß auch die Würden von 12, nämlich 1, 12, 144 und 1728, im Stande sind die Brüche zu entfernen, so wähle man wieder die Hälfte von 24. Man erhält:

$$\begin{array}{r} x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{17}{2} = 0 \\ \hline 1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728 \\ z^3 + 8z^2 - 54z - 14688 = 0, \text{ wo} \end{array}$$

$z = 12x$ ist.

§. 23.

Allgemeine Rechtfertigung dieser Verfahrensart.

Die Form $x^3 + \frac{m}{n}x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{r}{t} = 0$ ist im Stande alle möglichen kubischen Gleichungen mit gebrochenen Koeffizienten ohne Rücksicht auf die Zeichen vorzustellen. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist kein anderer als nqt . Die beyden obigen Behandlungen werden demnach hier im Allgemeinen so dargestellt:

$$x^3 + \frac{m}{n}x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{r}{t} = 0.$$

$$(nqt)^0 \cdot nqt \cdot n^2q^2t^2 \cdot n^3q^3t^3.$$

$$z^3 + mqtz^2 + n^2pqt^2z = n^3q^3rt^2 = 0.$$

Dafs nun durch dieses Verfahren die Gleichung nicht im Geringsten gestört worden, läfst sich kurz so erweisen.

Man multiplizire die Wurzel x durch nqt , das heifst, man setze in der ganzen Gleichung $nqtx = z$, folglich $x = \frac{z}{nqt}$.

Es ist demnach

$$x^3 = \frac{z^3}{n^3q^3t^3}$$

$$+ \frac{m}{n}x^2 = + \frac{mz^2}{n^3q^2t^2}$$

$$+ \frac{p}{q}x = + \frac{pz}{nq^2t}$$

$$+ \frac{r}{t} = + \frac{r}{t}$$

$$x^3 + \frac{m}{n}x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{r}{t} = \frac{z^3}{n^3q^3t^3} + \frac{mz^2}{n^3q^2t^2}$$

$$+ \frac{pz}{nq^2t} + \frac{r}{t} = 0.$$

Wird nun die neue Gleichung durch die Gröfse $n^3q^3t^3$ durchgehends multipliziert, so erscheint:

$$z^3 + qtz^2 + n^2pqt^2z = n^3q^3rt^2 = 0,$$

was zu erweisen war; denn das Nämliche kam auch oben heraus, als die Glieder mit den 4 Würden von nqt multiplicirt worden sind.

§. 24.

Ein Einwurf, der hierüber gemacht werden kann.

Es ist wahr, die Hinausschaffung der gebrochenen Koeffizienten geht vortrefflich von statten, wenn die kubische Gleichung genau 4 Glieder hat; aber was ist denn anzufangen, wenn nur 3 Glieder die unreine kubische Gleichung ausmachen? Ein Fall der so gut möglich als der andere ist, z. B. $x^3 - \frac{2}{5}x^2 - 70 = 0$ oder $y^3 + \frac{7}{9}y - \frac{106}{3} = 0$.

§. 25.

Hebung dieses Einwurfs.

Hier ist bald geholfen. Man darf nur die mangelnde Würde der unbekannten Gröfse mit den Koeffizienten *Null* als ergänzendes Glied hineinstellen, so geht die Sache wieder ihren ordentlichen Gang;

indem dadurch die Gleichung in ihrer Wesenheit nicht im mindesten geändert, sondern nur eine zweckmäßige Umgestaltung ihrer Form herbeygeführt wird.

Das erste Beyspiel wird also so zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r} x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 0x - 70 = 0 \\ 5^0. \quad 5. \quad 25. \quad 125. \\ \hline y^3 - 2y^2 - 8750 = 0, \text{ wo } y = 5x \text{ ist.} \end{array}$$

Das zweyte Beyspiel erhält folgende Behandlung:

$$\begin{array}{r} y^3 + 0y^2 + \frac{7}{9}y - \frac{106}{3} = 0 \\ 3^0 \quad 3. \quad 9. \quad 27. \\ \hline z^3 + 7z - 954 = 0, \text{ wo } z = 3y. \end{array}$$

§. 26.

Eine Haupteigenschaft, die in allen unreinen kubischen Gleichungen anzutreffen ist.

In jeder gutgeordneten Gleichung des dritten Grades von 4 Gliedern enthält der Koefficient des 2ten Gliedes die Summe der 3 Wurzeln: der Koefficient des 2ten Gliedes ist die Summe dreier Produkte welche entstehen, wenn man je 2 und 2 Wurzeln in einander multipliziert. Das vierte Glied endlich ist das Produkt aus allen 3 Wurzeln zugleich.

Beweis. Es sey allgemein eine Wurzel $= a$ die andere $= b$, und die dritte $= c$, daher $x = a$, $x = b$ und $x = c$, oder $x - a = 0$, $x - b = 0$ und $x - c = 0$. Multiplicirt man diese 3 auf Null

gebrachte Wurzelgleichungen in einander, so entsteht eben darum als Resultat eine kubische Gleichung von 4 Gliedern, wo die obigen 3 Gesetze deutlich in die Augen springen. Die Skizze dieser Gleichung ist

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

Man verrichte nun die Multiplikation wirklich,

$$x - a$$

$$x - b$$

$$\hline x^2 - ax$$

$$- bx + ab$$

$$\hline x^2 - ax - bx + ab$$

$$x - c$$

$$\hline x^3 - ax^2 - bx^2 + abx$$

$$+ cx^2 + acx + bcx - abc$$

$$\hline x^3 = (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0.$$

Es stellt demnach der Koeffizient des zweyten Gliedes $(a + b + c)$ unwidersprechlich die Summe der 3 Wurzeln in der höchsten Allgemeinheit dar. Der Koeffizient des dritten Gliedes enthält eben so ausgemacht die Summe der zu zwey und zwey in einander multiplicirten Wurzeln $ab + ac + bc$. Das vierte Glied spricht endlich die 3 Wurzeln unverkennbar aus,

§. 27.

Folgerungen, die noch aus obigem Beweise hervorgehen.

I. Ist das letzte Glied in einer kubischen Gleichung von mehrern Gliedern positiv, so hat die Gleichung nur eine negative Wurzel, oder es sind alle 3 negativ. Denn werden die Wurzelgleichungen auf

Null gebracht, dann bekommen die negativen Wurzeln ein positives und die positiven ein negatives Zeichen. Im ersten Fall, wenn nämlich eine Wurzel verneint und die andern bejaht sind, kommen 2 negative Gröſsen in der Multiplication, welche bekanntlich ein positives Produkt geben. Im zweyten Fall, wo die Wurzeln alle verneint sind, ergeben sich für die Multiplikation lauter positive Faktoren, welche natürlich auch ein positives Produkt geben müssen.

2. Ist das letzte Glied negativ, so enthält die Gleichung entweder lauter positive Wurzeln, oder es sind deren nur zwey vorhanden. Der Grund dieses Ereignisses ist leicht erklärbar.

3. Betragen zwey negative Wurzeln so viel als eine positive, oder umgekehrt, zwey positive Wurzeln so viel als eine negative, dann mangelt das zweyte Glied in der Gleichung; weil der Koeffizient in diesem Falle nothwendig $= 0$ werden muß.

4. Heben sich 2 Produkte der zwey und zwey in einander multiplicirten Wurzeln gegen einander auf, so mangelt das dritte Glied aus gleicher Ursache.

§. 28.

Versinnlichender Beweis der vierten Folgerung.

Da die Wahrheit des letztern Schlusses nicht so unmittelbar in die Augen leuchtet als die erstern drey, so wollen wir ein Beyspiel aufstellen, wo dieser Fall vorkömmt.

Es sey $x = 4$, $x = 12$ und $x = -3$. Multiplicirt man hier $+4$ mit -3 , so erscheint -12 ; ferner giebt $+12$ mit $-3 = -36$, und $+12$ mit $+4$ macht $+48$. Da nun -12 und -36 zur Summe auch -48 auswerfen, so heben sich diese beyden Summen, und der Koefficient ist eben darum $= 0$. Laßt uns sehen, ob dieses Ereigniß bey der Zusammensetzung der kubischen Aequation auch wirklich Platz greift!

$$\begin{array}{r}
 x \quad - \quad 4 \\
 x \quad - \quad 12 \\
 \hline
 x^2 \quad - \quad 4x \\
 \quad - \quad 12x \quad + \quad 48 \\
 \hline
 x^2 \quad - \quad 16x \quad + \quad 48 \\
 x \quad + \quad 3 \\
 \hline
 x^3 \quad - \quad 16x^2 \quad + \quad 4x \\
 \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad 48x \quad + \quad 144 \\
 \hline
 x^3 \quad - \quad 13x^2 \quad \quad \quad + \quad 144 = 0.
 \end{array}$$

Die Sache hat also ihre Richtigkeit.

§. 16.

*Noch ein Schluss, der aus obigem fruchtbaren
Lehrsätze hervorgeht.*

Keine von den 3 Wurzeln kann $= 0$ seyn; denn in diesem Falle wäre das 4te Glied auch $= 0$, und die kubische Gleichung liefse sich zu einer quadratischen herabwürdigen. Wir wollen als Beyspiel die Gleichung aufstellen:

$$x^3 + 6x^2 - 91x + 0 = 0.$$

Sie kann sehr natürlich auch so geschrieben und behandelt werden:

$$\begin{array}{rcl}
 & x^3 + 6x^2 = 91x \\
 : x & x^2 + 6x = 91 \\
 \text{Ergänzt} & \quad +9 \quad +9 \\
 \hline
 & x^2 + 6x + 9 = 100 \\
 \checkmark & \quad \quad x + 3 = \pm 10 \\
 & \text{und } x = 7 \text{ oder } -13.
 \end{array}$$

§. 30.

Anwendung einer der obigen Folgerungen auf die Lösung einiger kubischen Probleme.

Schon aus der Eigenschaft, daß das letzte Zahlenglied ein Produkt aus allen 3 Wurzeln zugleich sey, fließt eine sehr leichte Methode, die rationalen Gleichungen, das heißt solche, wo wenigstens eine Wurzel rational ist, aufzulösen. Man darf nur das letzte Zahlenglied, zumal wenn es klein ist, in seine Faktoren zerfallen, und einige davon prüfen, ob sie nicht durch die gehörige Zusammensetzung die nämliche Gleichung geben, welche aufgelöst werden soll. Wir wollen als ein Exempel die Gleichung vor uns nehmen, die erst kürzlich *H. Prof. Magold* in Landshut durch einen wahrhaft mühsamen Umweg gelöst, und dem Drucke übergeben hat. Sie heißt:

$$x^3 - 3x - 4x + 12 = 0.$$

Man zerfalle das 4te Glied in seine Faktoren 1. 2. 3. 4. 6. und 12. und versuche, ob nicht etwa der zweyte Faktor als Wurzel Genüge leistet. Findet dieß nicht statt, so wiederhole man das nämliche Verfahren mit einem andern Faktor, bis man seinen Zweck erreicht hat.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & + 8 \\
 - 3x^2 & = & - 12 \\
 - 4x & = & - 8 \\
 + 12 & = & + 12 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & = & 0.
 \end{array}$$

Es ist also 2 eine wahre Wurzel dieser Gleichung. Man bestimme die übrigen beyden Wurzeln auf dem gewöhnlichen Wege, das heißt, man dividire die Nullgleichung durch die ebenfalls auf Null gebrachte Wurzelgleichung, so erscheint bekanntlich eine quadratische Aequation.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & | & x^2 - x - 6 = 0 \\
 (x - 2) & & \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 & & \\
 - + & & \\
 \hline
 - x^2 - 4x & & \\
 (x - 2) & & \\
 - x^2 + 2x & & \\
 - + & & \\
 \hline
 - 6x + 12 & & \\
 (x - 2) & & \\
 - 6x + 12 & & \\
 + - & & \\
 \hline
 0 & &
 \end{array}$$

Es ist folglich:

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 - x & = & 6 \\
 \text{Ergänzt} & + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \\
 \hline
 x^2 - x + \frac{1}{4} & = & 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2} \\ \text{vers.} \quad & x = \frac{6}{2} \text{ oder } -\frac{4}{2} \\ \text{d. i.} \quad & x = 3 \text{ oder } 2. \end{aligned}$$

Die 3 Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung sind demnach 2, 3 und -2 .

§. 31.

*Auflösung eines kubischen Problems aus Uflä-
kers Exempelbuch.*

Dieses Problem lautet so: Es sagt A zu B: Ich habe nur um 12 Thaler mehr als du; aber wenn man das Produkt unsers Geldes mit der Summe unsers Geldes multiplicirt, so kommen 14560 Thaler. Wie viel Geld hat jeder von uns?

Auflös. Es habe B x Thaler, folglich hat A $x + 12$ Thaler. Die Summe ist $2x + 12$, und das Produkt $x^2 + 12x$. Diese beyden Grössen mit einander multiplicirt!

$$\begin{array}{r} x^2 + 12x \\ 2x + 12 \\ \hline 2x^3 + 24x^2 \\ 2x^3 + 36x^2 + 144x = 14560 \\ \hline : 2 \quad x^3 + 18x^2 = 72x = 7280. \end{array}$$

Die Faktoren mittlerer Grösse sind von der Zahl 7280 folgende: 7, 8, 10, 14, 16 u. s. f. Man versuche die Zusammensetzung durch 10, so wird es sich, wenn auch gähling 10 keine Wurzel ist, doch zeigen, ob sie grösser oder kleiner seyn müsse.

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 1000 \\
 18x^2 = 1800 \\
 72x = 720 \\
 \hline
 x^3 + 18x^2 + 72x = 3520
 \end{array}$$

Man sieht hieraus, daß 10 als Wurzel zu klein ist. Wir wollen 14 versuchen; weil die Wüthen schnell wachsen, folglich sich leicht dem Doppelten des Vorigen nähern können.

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 2744 \\
 18x^2 = 3528 \\
 72x = 1008 \\
 \hline
 x^3 + 18x^2 + 72x = 7280
 \end{array}$$

Also ist 14 eine Wurzel der Gleichung: nur weiß man noch nicht, ob sie die einzige wahre sey, oder ob noch eine und die andere Wurzel der Aufgabe ein Genüge leiste. Es müssen demnach auch die übrigen Wurzeln bestimmt werden.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 \quad | \quad x^2 = 32x + 520 \\
 (x - 14x) \quad | \\
 \hline
 x^3 - 14x^2 \\
 - \quad + \\
 \hline
 + 32x^2 + 72x \\
 (x - 14x) \\
 32x - 448x \\
 - \quad + \\
 \hline
 + 520x - 7280 \\
 (x - 14) \\
 520x - 7280 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Daher } x^3 + 32x & = & - 520 \\ \text{Ergänzt } & + 16^2 & = + 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 32x + 16^2 & = & - 264 \\ \sqrt{\quad} \quad x + 16 & = & \pm \sqrt{-264} \end{array}$$

und $x = -16 \pm \sqrt{-264}$, woraus hervorgeht, daß die beyden übrigen Wurzeln für das aufgeworfne Problem untauglich sind.

§. 32.

Ein anderes Problem aus Uflacker.

Einige Kaufleute haben zusammen ein Kapital von 8240 Thaler. Dazu legt ein jeder noch vierzigmal so viele Thaler als der Personen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Prozent als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinn auf folgende Art. Es nimmt nämlich jeder zehenmal mehr Thaler als ihrer sind. Nun bleiben noch 224 Thaler übrig. Wie viel Kaufleute waren in der Gesellschaft?

Auflösung. Man drücke die Anzahl der Personen durch x aus. Es legte also jeder noch $40x$, das heißt alle $40x^2$ Thaler ein. Man rechne nun nach der Regel de tri, oder nach der Reesischen Regel, was der Gewinn beträgt:

$$\begin{array}{rcl} \text{Thaler} & \text{Thaler} & \text{Thaler} \\ 100 & : & x = 40x^2 + 8240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \hline 40x^3 + 8240x \end{array}$$

$$\text{Antw. } \frac{40x^3 + 8240x}{100} \text{ Thaler Gewinn}$$

Gleichung

$$\frac{40x^3 + 8240x - 10x^2}{100} = 224$$

$$\times 100 \quad 40x^3 + 8240x - 1000x^2 = 22400$$

$$\text{Geord.} \quad 40x^3 - 1000x^2 + 8240x = 22400$$

$$: 40 \quad x^3 - 25x^2 + 206x = 560.$$

Da nun die mittleren Faktoren von 560 die Zahlen 7, 8, 10, 14 u. s. w. sind, so prüfe man z. B. 10, weil die Multiplicationen damit leicht werden.

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 1000 \\ 206x & = & 2060 \\ \hline x^3 + 206x & = & 3060 \\ - 25x^2 & = & - 2500 \\ \hline x^3 - 25x^2 + 206x & = & 560. \end{array}$$

Die Wahl des Faktors war also zugleich auch glücklich; denn 10 ist wirklich eine Wurzel.

Nun untersuche man auch die zwey übrigen Wurzeln.

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 25x^2 + 206x - 560 & : & x^2 - 15x + 56 = 0 \\ (x - 10) & & \\ \hline x^3 - 10x^2 & & \\ - + & & \\ \hline - 15x^2 + 206x & & \\ x - 10 & & \\ \hline - 15x^2 + 150x & & \\ + & & \\ \hline + 56x - 560 & & \\ (x - 10) & & \\ \hline - 56x + 560 & & \\ + & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Es heisst demnach die quadratische Gleichung,
welche aus der Division hervorgieng:

$$\begin{array}{l} x^2 - 15x = -56 \\ \text{Ergänzt} \quad + \frac{[15]^2}{[2]^2} = + \frac{225}{4} \\ \hline x^2 - 15x + \frac{[15]^2}{[2]^2} = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\checkmark \quad x - \frac{15}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{vers.} \quad x = \frac{15 \pm 1}{2}$$

Also $x = 8$ oder 7 oder beyde zugleich.

Die Wurzeln sind daher 7 , 8 und 19 .

§. 33.

*Dreyfache Probe über die drey Resultate der so
eben gelösten Aufgabe.*

So bestimmt auch das oben vorgelegte Problem zu seyn schien, so gehört es doch unter die Kategorie von unbestimmten Problemen, weil man nicht ausdrücklich angeben kann, ob es 7 oder 8 oder 10 Kaufleute gewesen sind, die an der Gesellschaft Theil genommen haben. Jede der drey Zahlen hält die Probe aus, wie wir gleich zeigen werden.

I.

Läfst man 7 Kaufleute gelten, so legt jeder $40 \times 7 = 280$ folglich alle $280 \times 7 = 1960$ Thaler ein. Diese Summe zu den schon vorhandenen 8140 Thalern addirt, giebt 10200 Thaler. Sie ge-

winnen damit 7 Prozent, das macht 714 Thaler. Davon nimmt jeder $7 \times 10 = 70$, folglich alle $70 \times 7 = 490$ Thaler. Es müssen nun noch 224 Thaler bleiben. Dieß giebt auch die Subtraktion wirklich

$$\begin{array}{r} 714 \\ 490 \\ \hline 224 \end{array}$$

II.

Nimmt man 8 Kaufleute an, so ist es klar daß einer $40 \times 8 = 320$, sohin alle $320 \times 8 = 2560$ Thaler legen. Dieß zu den schon vorhandenen 8240 Thalern geworfen, giebt das Kapital 10800 Thaler. Sie gewinnen 8 Prozent damit, welches von der ganzen Summe 864 Thaler beträgt. Hievon nimmt jeder $10 \times 8 = 80$, sohin alle $80 \times 8 = 640$ Thaler, welche Subtraktion wiederum die 224 Thaler zum Rest läßt; denn

$$\begin{array}{r} 864 \\ 640 \\ \hline 224 \end{array}$$

III.

Setzen wir endlich, es waren 10 Kaufleute gewesen. Einer gab $40 \times 10 = 400$, also alle $400 \times 10 = 4000$ Thaler. Dieß macht mit den vorhandenen Kapital 12240 Thaler. Sie gewinnen 10 Prozent, folglich von der ganzen Summe 1224 Thaler. Jeder nimmt $10 \times 10 = 100$ Thaler, mithin alle $100 \times 10 = 1000$ Thaler. Diese 1000 Thaler von

1224 Thalern abgezogen, geben abermal einen Rest von 224 Thalern. Denn

$$\begin{array}{r} 1224 \\ 1000 \\ \hline 224 \text{ Thaler.} \end{array}$$

§. 34.

Eine zur Uebung vorgelegte Aufgabe.

Etliche Personen treten in Gesellschaft. Jede legt 10 mal mehr Gulden ein, als Personen sind. Sie gewinnen von jedem 100 fl. 6 fl. mehr als Personen die Gesellschaft stark ist. Wie viel waren es Personen, da der sämmtliche Gewinn 392 fl. betrug?

§. 35.

Eine besonders leichte Art, einige unreine kubische Gleichungen aufzulösen.

Hat eine unreine Gleichung des dritten Grades ihr Quadratglied bey sich, so ist in den meisten Fällen bey nahe nichts leichters, als den Wurzeln auf Spur zu kommen. Man bringt die Gleichung nicht auf Null, sondern ordnet sie so, daß links die Würden der unbekannten Gröfse in gehöriger Ordnung auf einander folgen, und daß rechts das Zahlenglied oder das Produkt aus sämmtlichen Wurzeln allein zu stehen kömmt.

Man schickt sich nun an, linker Hand die Kubikwurzel auszuziehen, das heißt man untersucht, wie oft das dreyfache Quadrat der unbekannten Gröfse

in dem 2ten Glied enthalten sey. Eben so merke man auch an, welches ungefähr zur rechten Seite die Kubikwurzel aus die Zahl seyn mag. Man stelle nun in dieser unvollkommenen Wurzelgleichung die unbekannte Gröfse allein, und sehe welchem Faktor aus der Zahl dieser Werth von x am nächsten kömmt. Die Untersuchung durch das Zusammensetzen der Gleichung wird lehren, welcher von beyden Faktoren, zwischen die der unvollkommene Werth von x hineinfällt, die wahre Wurzel ist. Oft lassen sich bey der oberflächlichen Auszeichnung der Kubikwurzel Schlüsse machen, die den Werth von x weit näher bestimmen helfen. Folgende Beyspiele werden das aufs deutlichste zeigen.

§. 36.

Ein hieher gehöriges Problem.

Ein Lehrer hatte etliche Schüler. Um sie zu einer öffentlichen Prüfung aufzumuntern, versprach er jedem, der sich wohl halten würde, so viele Kreutzer, als das Quadrat aller Schüler abwirft. Der Lehrer hielt auch nach geendigter Prüfung getreulich Wort. Allein 5 derselben hatten ihre Sache so schlecht gemacht, daß sie nichts bekamen, und doch betrug das ausgeheilte Geld 12 fl. 6 kr. Wie viele Schüler hatte er wohl?

Auflös. Man nenne die Anzahl der Schüler $= x$, so ist das Quadrat derselben $= x^2$. Nun folgere man nach der Regel de tri:

x Schüler bekommt x^2 Kreuzer was $x - 5$ Schüler.

$$\text{Antw. } \frac{x^2}{x^3 - 5x^2} \text{ krzr.}$$

Da nun 12 fl. 6 kr. in lauter Kreuzer aufgelöst, deren 726 geben, so ist nichts natürlicher als die Gleichung

$$x^2 - 5x^2 = 726.$$

Man schicke sich an linker Hand die Wurzel aus-zuziehen

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 \quad | \quad x - 1\frac{2}{3} \\ \underline{- x^3} \\ - 5x^2 \\ (3x^2) \\ \underline{- 5x^2} \\ + \frac{25x}{3} \\ \phantom{+ \frac{25x}{3}} - \frac{125}{27} \\ \hline - 5x^2 + \frac{25x}{3} - \frac{125}{27} \end{array}$$

Da man nun sieht, daß von einem vollkommnen Kubus $\frac{25x}{3}$ abgeht, und $\frac{125}{27}$ zu viel ist, so mag man als Wurzel, weil sie doch eine ganze Zahl seyn muß, $x - 2$ gelten lassen. Daher die unvollkommene Gleichung

$$x - 2 = 9 \text{ allernächstens.}$$

$$\begin{array}{r} + 2 + 2 \\ \hline x = 11 \end{array}$$

Nun ist zufälliger Weise 11 sogar ein Faktor vom Zahlengliede 726. Man hat demnach guten Grund zu vermuthen, daß 11 eine wahre Wurzel der Gleichung sey. Diefs soll auf der Stelle untersucht werden.

$$\begin{array}{r} x^3 = 1331 \\ - 5x^2 = - 605 \\ \hline x^3 - 5x^2 = 726 \end{array}$$

also vollkommen übereinstimmend!

Man halte nun auch Nachfrage, ob die Gleichung sonst keine wahre Wurzel mehr enthält, die das Problem unbestimmt machen könnte.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 726 \mid x^2 + 6x + 66 = 0, \\ (x - 11) \quad | \\ - x^3 + 11x^2 \\ \hline \quad 6x^2 - 726 \\ (x - 11) \\ \quad 6x^2 - 66x \\ \quad - \quad + \\ \quad \quad 66x - 726 \\ \quad \quad (x - 11) \\ \quad \quad 66x - 726 \\ \quad \quad - \quad + \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Schreibt man nun die quadratische Gleichung so an: $x^2 + 6x = -66$, so entdeckt man beym ersten Anblicke, daß die Ergänzung 9 auf der rechten Seite unmöglich eine Positivität hervor zu bringen im Stande ist, folglich sind die andern beyden Wurzeln bloß eingebildet.

§. 38.

Ein ähnliches Problem zur Selbstübung.

Ein verunglückter Edelmann drückte sich einst so aus: „Wenn ich von jedem Landgute, „das ich besaß, nur jährlich so viele hundert „Gulden zurückgelegt hätte, als groß die Anzahl meiner Güter war, so würde ich bereits „ein Vermögen von 1 890 fl. beysammen haben. „Man muß aber wissen,“ fügte er hinzu, „daß „ich 3 Jahre länger im vollen Besitz derselben „war, als viele Güter es gewesen sind.“

Man enträthsle ihre Anzahl!

§. 39.

Noch ein Problem dieser Art, das hier zu mehrerer Beleuchtung meiner vortheilhaften Methode gelöst werden soll.

Jemand goß aus einer Kanne Wein 4 Maas heraus, und schüttete so viel Wasser dafür hinein. Von diesem Gemische goß er wieder 4 Maas heraus, und schüttete abermal so viel Wasser hinein. Nachdem er dies zum drittenmale gethan hatte, fand es sich, daß um $2\frac{1}{2}$ Maas Wasser mehr als Wein in der Kanne war. Wie viel Wein mag wohl Anfangs in der Kanne gewesen seyn?

Auflös. Es waren anfänglich x Maas Wein in der Kanne. Nach dem ersten Aus- und Eingießen befanden sich $x - 4$ Maas Wein in derselben.

Man berechne, wie viel Wein beym zweyten Herausschenken mitgeht. Man kann sich hierzu einer geometrischen Proportion oder auch der Regel de tri, oder der Rees'schen Regel bedienen. Ich wähle der Abwechslung zu Lieb des letztern.

M. W.?	x — 4 M. Weingehalt.
x	4 M. Wasser.
	Antw. $\frac{4x - 16}{x}$ M. W.

Dieß muß nun von $x - 4$ Maafs abgezogen werden, damit man erfährt, wie viel Wein noch nach dem zweyten Aus- und Einschenken in der Kanne zurückbleibt.

$$\begin{aligned}
 x - 4 - \frac{4x - 16}{x} &= \frac{x^2 - 4x - 4x + 16}{x} \\
 &= \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \text{ Maafs Wein bleiben noch in der Kanne.}
 \end{aligned}$$

Man rechne wieder, was beym dritten Herausschenken an Wein weggeht.

M. W.?	$\frac{x^2 - 8x + 16}{x}$ M. W. g. h.
x	4 M. W.
	Antw. $\frac{4x^2 - 32x + 64}{x^2}$ M. W.

Und wird abgezogen vom Obigem.

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x} - \frac{4x^2 - 32x + 64}{x^2} =$$

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 16x - 4x^2 + 32x - 64}{x^2} =$$

$$\frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2} \text{ Maafs Weinbestand.}$$

Da nun die Kanne x Maafs Gemisch enthält, so bekommt man das Wasser, wenn der so eben gefundene Weinbestand davon abgezogen wird. Dieß giebt:

$$x - \frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2} =$$

$$\frac{x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64}{x^2} = \frac{12x^2 - 48x + 64}{x^2}$$

Maafs Wasserbestand.

Es übertrifft aber das Wasser den Wein in der Kanne um $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ Maafs; daher ohne weiters die Gleichung:

$$\frac{12x^2 - 48x + 64}{x^2} - \frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{24x^2 - 96x + 128 - x^3}{x^2} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{l} \times x^2 \\ \times 2 \end{array} \quad 48x^2 - 192x + 256 - 2x^3 = 5x^2$$

$$\text{Oder} \quad 2x^3 - 48x^2 + 192x - 256 = -5x^2$$

$$\frac{+ 5x^2 \quad + 256 \quad + 5x^2 + 256}{2x^3 - 43x^2 + 192x = 256}$$

$$: 2 \quad x^3 - \frac{43}{2}x^2 + 96x = 128$$

Man beginne trotz dem gebrochnen Coefficienten die Wurzel auszuziehen.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x \mid x - 7 \\
 - x^3 \phantom{- \frac{43x^2}{2}} \\
 \hline
 - \frac{43x^2}{2} + 96x \\
 \phantom{- \frac{43x^2}{2}} + 3x^2 \\
 \hline
 - \frac{42x}{2} \\
 \phantom{- \frac{42x}{2}} + 147x \\
 \phantom{- \frac{42x}{2}} - 343 \\
 \hline
 - \frac{x^2}{2} - 51x + 343
 \end{array}$$

Die unvollkommne Wurzelgleichung hiesse demnach

$$\begin{aligned}
 x - 7 &= 5 \\
 \text{und } x &= 12.
 \end{aligned}$$

Um nun die Wurzel näher zu bestimmen, bediene man sich folgender Schlüsse:

1. Auf der linken Seite der Gleichung mangelt so-

wohl $\frac{x^2}{2}$ als $51x$.

2. Dagegen ist um die Zahl 343 zu viel da.

Man kann demnach die Gleichung einigermaßen ergänzen, wenn $\frac{x^2}{2} = \frac{144}{2} = 72$ und $51x = 51 \times 12 = 612$ beyderseits addirt, hingegen aber 343 beyderseits subtrahirt wird. Daher

$$x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x = 128$$

$$+ \frac{x^2}{2} = + 72$$

$$+ 51x = + 612$$

$$x^3 - 31x^2 + 147x = 812$$

$$- 343 = - 343$$

$$x^3 - 21x^2 + 137x - 343 = 469$$

 $\sqrt[3]{}$

$$x - 7 = 7 \text{ bis } 8$$

vers.

$$x = 14 \text{ bis } 15$$

Weil nun weder 14 noch 15 ein Faktor aus 128 ist, wohl aber die Zahl 16 dieses Prädikat hat, so versuche man die Zusammenstellung der Aequation damit.

$$x^3 = 4096$$

$$- \frac{43x^2}{2} = - 5504$$

$$x^3 - \frac{43x^2}{2} = - 1408$$

$$+ 96 = + 1536$$

$$x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x = 128. \text{ Richtig!}$$

Es befanden sich also anfänglich 16 Maafs Wein in der Kanne.

Probe. Nach der ersten Aus- und Einschenkung waren 12 Maafs Wein und 4 Maafs Wasser in der Kanne. Will man wissen, wie viel Maafs Wein bey der zweyten Herausgießung mitläuft, darf man blofs die Regeldetri ansetzen: 16 Maafs geben 4 Maafs, was geben 12 Maafs? Antwort 3 Maafs. Folglich sind nach der zweyten Aus- und Einschenkung 9

Maafs Wein und 7 Maafs Wasser in der Kanne: weil mit den 3 Maafsen Wein auch 1 Maafs Wasser mit heraus lief.

Wie viel Wein kam aber das drittemal heraus? Das wird die Regeldetri entscheiden: 16 geben 4, was 9? Antwort $2\frac{1}{4}$ Maafs. Diefs von 9 abgezogen bleiben $6\frac{3}{4}$ Maafs Wein in der Kanne. Da nun das übrige Wasser seyn muß, so dürfen nur $6\frac{3}{4}$ Maafs von 16 Maafs, die die Kanne faßt, abgezogen werden. Man erhält $9\frac{1}{4}$ Maafs Wasser. Nun wird die Subtraktion $9\frac{1}{4} - 6\frac{3}{4}$ genau $2\frac{1}{2}$ Maafs geben, um wie viel nämlich mehr Wein als Wasser in der Kanne ist, was zu erproben war.

Aber könnte sich die Sache nicht auch anders verhalten? das heisst mit andern Worten: Könnte das kubische Problem nicht etwa unbestimmt seyn, und mehrere Antworten, als eine zulassen? Diefs soll sogleich untersucht werden.

$$x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x - 128 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11x}{2} + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r} (x - 16) \\ x^3 - 16x^2 \\ \hline + \end{array}$$

$$- \frac{11x^2}{2} + 96x$$

$$(x - 16)$$

$$\begin{array}{r} - \frac{11x^2}{2} + 88x \\ + \quad 2 \end{array}$$

$$8x - 128$$

$$x - 16$$

$$x - 128$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 0 \end{array}$$

Die quadratische Gleichung und ihre Ausführung sieht demnach so aus:

$$x^2 - \frac{11x}{2} = -8$$

$$+ \left[\frac{11}{4} \right]^2 = + \frac{121}{16}$$

$$x^2 - \frac{11x}{2} + \left[\frac{11}{4} \right]^2 = \frac{7}{16}$$

$$\sqrt{\quad} \quad x - \frac{11}{4} = \frac{\pm \sqrt{7}}{4}$$

$$\text{vers. } x = \frac{11 \pm \sqrt{7}}{4} = \frac{11 \pm 2,645 \dots}{4}$$

$$\text{d. i. } x = 3,411 \dots$$

$$\text{oder } x = 2,089$$

Da nun diese Wurzeln zwar mathematisch richtig sind, aber für das gegebene Problem keinen Sinn haben, (denn wie kann man aus einer Kanne, die nur 3 oder gar nur 2 Maafs Wein enthält, 4 Maafs herauschenken?) so muß man es gleich wohl bey der obigen Auflösung bewenden lassen.

§. 40.

Auflösung der nämlichen Gleichung durch Ausrottung des gebrochnen Koefficienten.

$$x^3 - \frac{43x^2}{2} + 96x - 128 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 2^0. & 2. & 4. & 8. \\ \hline y^3 - 43y^2 + 384y - 1024 = 0 \end{array}$$

oder $y^3 - 43y^2 + 384y = 1024$, wo $y = 2x$ ist.

Man ziehe nun wieder beyderseits die Wurzel aus, um zu sehen, was linker Hand mangelt, oder zu viel ist.

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 43y^2 + 384y \quad | \quad y - 14 \\
 \underline{-y^3} \\
 -43y^2 + 384y \\
 (3y^2) \\
 \underline{ 3y^2} \\
 42y^2 \\
 + \\
 + 588y \\
 - \\
 - 2744 \\
 \underline{ - 2744} \\
 -y^2 - 204y + 2744
 \end{array}$$

Da nun rechterseits die Wurzel etwas über 10 ist, so heisst die unvollkommene Wurzelgleichung

$$y - 14 = 10$$

$$y = 24.$$

Man ergänze nun die Seite linker Hand auf die oben gezeigte Weise.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 - 43y^2 + 384y & = & 124 \\
 + y^2 & = & + 576 \\
 + 204y & = & + 4896 \\
 \hline
 y^3 - 42y^2 + 588y & = & 6496 \\
 - 2744 & = & - 2744 \\
 \hline
 y^3 - 42y^2 + 588y - 2744 & = & 3752
 \end{array}$$

$\sqrt[3]{}$

vers.

$$y - 14 = 15 \text{ bis } 16$$

$$y = 30.$$

Wollte man nun die Gleichung auf ein neues nach Maafsgabe der Wurzel $y = 30$ ergänzen, so käme man der wahren Wurzel noch näher. Weil

man aber ohnehin deutlich sieht, daß 32 ein Faktor des Zahlengliedes ist, so ist diese Bemühung unnöthig. Man darf unbesorgt setzen

$$\begin{array}{rcl} y & = & 32 \\ \text{aber } y & = & 2x \\ \hline 2x & = & 32 \\ : 2 & & x = 16 \text{ Maafs.} \end{array}$$

§. 41.

Gesetzt aber, das Zahlenglied linker Hand ist in kubischen Gleichungen dieser Art negativ, z. B. $x^3 - 30x^2 = -3872$, wie muß man da zu Werke gehen?

In einem solchen Falle bringe man die Gleichung auf Null, ziehe die Kubikwurzel aus, und urtheile aus dem Reste, wie die Gleichung ergänzt werden müßte, daß sie aufgieng. Da nun die unvollkommene Wurzelgleichung ebenfalls Null ist, so ergänze man wirklich, und zwar so, daß rechter Hand eine positive Zahl zum Vorschein kömmt, und ziehe dann die Wurzel auf beyden Seiten auf ein neues aus. Man wird der Wurzel dadurch um einige Einheiten näher kommen. Ergänzt man noch einmal, so wird man bald sehen können, welchem Faktor vom Zahlengliede sich die Wurzel nähert.

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 30x^2 + 3872 & | & x - 10 = 0 \\ \underline{-x^3} & & x = 10 \\ & & \\ & & -30x^2 = 3872 \\ & & 3x^2 \\ \hline & & -30x^2 + 300x - 1000 \\ & & + \quad \quad \quad + \\ \hline & & -300x + 4872. \end{array}$$

Man sieht hieraus, dafs $300x$ abgehen, und zugleich 4872 Einheiten zuviel sind. Es mufs also die erste Parthie beyderseits addirt und die zweyte beyderseits abgezogen werden. Nimmt man hier $x = 10$ an, so kann rechter Hand keine Positivität erzielt werden; denn von 3000 ist es unmöglich, 4872 abzuziehen. Soll demnach $300x$ die Zahl 4872 übersteigen, so lasse man x mehr als 16 z. B. die runde Zahl 20 gelten, und ergänze

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 30x^2 + 3872 & = & 0 \\
 & + & 300x & = & 6000 \\
 & - & 4872 & = & 4872 \\
 \hline
 x^3 - 30x^2 + 300x - 1000 & = & 1128 \\
 \checkmark \quad x - 10 & = & 10,03\dots
 \end{array}$$

$x = 20,03\dots$ woraus hervorgeht, dafs x noch etwas gröfser als 20, etwa 22, weil diefs ein Faktor aus 3872 ist, angenommen werden müsse. Ich will also 22 in vollem Vertrauen versuchen.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & 10648 \\
 - 30x^2 & = & - 14520 \\
 \hline
 x^3 - 30x^2 & = & 3872. \quad \text{Es ist auch wirklich so.}
 \end{array}$$

§. 42.

Ein hieher gehöriges Problem.

Von einem prächtig hergestellten Weinberge, dessen Länge und Breite genau einerley Maafs hatte, wurde im May die Quadratruthe für 78 Franken gebothen. Allein die künftige Witterung war dem Weinstocke so ungünstig, dafs

die Quadratruthe um so viele Franken herunter kam, als viele Ruthen der Weinberg lang oder breit war, und dafs der ganze Kaufschilling nicht mehr als 70000 Franken ausmachte; welche Länge und Breite, oder wie viel Quadratruthen hatte der veräusserte Weinberg?

Auflös. Der Weinberg hielt in der Länge x Ruthen und eben so viele in der Breite. Daher die Anzahl der Quadratruthen x^2 . Weil nun eine Quadratruthe für $78 - x$ Franken veräussert wurde, so kosten alle $x^2 [78 - x]$ Franken; daher die Gleichung

$$x^2 [78 - x] = 70000,$$

oder $78x^2 - x^3 = 70000$

Geordn. $x^3 - 78x^2 + 70000 = 0.$

Daraus die Kubikwurzel zu ziehen versucht.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 78x^2 + 70000 & x - 26 = 0 \\
 \underline{- x^3} & \text{und } x = 26. \\
 3x^2 & \\
 \underline{- 78x^2 + 2028x} & \\
 + & \\
 & - 17576 \\
 & + \\
 & \underline{- 2028x + 87576.}
 \end{array}$$

Man erkennt hieraus, dafs zu einer vollkommenen Kubikgröfse $2028x$ mangeln, und dafs dagegen um 87576 Einheiten zu viel da sind. Man nehme demnach x so an, dafs $2028x$ die Zahl 87576 übersteigen. Diefs erfährt man durch die kleine Gleichung

$$2028x = 87576$$

$$: 2028$$

$$x = 43.1 \dots$$

Ich nehme daher $x = 50$; weil 50 ein Faktor aus 70000 ist, und weil sich mit einer Nullzahl gut rechnen läßt.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 78x^2 + 70000 & = & 0 \\
 + 2028x & = & + 101400 \\
 - 87576 & = & - 87576 \\
 \hline
 x^3 - 78x^2 + 2028x - 87576 & = & 13824
 \end{array}$$

$$\sqrt{x - 26} = 24$$

$x = 50$. Also wirklich errathen.

Es war demnach der Weinberg 50 Ruthen lang und 50 Ruthen breit.

§. 43.

Einwurf gegen diese Methode.

Ewig Schade, daß sich die bis daher beschriebne Methode, unreine kubische Aequationen, so leicht aufzulösen, nur auf den Fall anwenden lassen, wenn die Gleichung ein Quadratglied der unbekannten Grösse enthält. Mangelt dieses Quadratglied, dann geht die ganze Kunst auf die Neige.

§. 44.

Entkräftung des gemachten Einwurfs.

Auch in diesem Punkte ist für die meisten Fälle bald Rath geschafft. Eine kubische Gleichung, die kein Quadratglied bey sich hat, läßt sich augenblicklich in eine andere verwandeln, die mit demselben versehen ist. Ja, es kann dieses Quadratglied sogar nach Belieben gewählt werden. — Ein Beyspiel soll dieß versinnlichen. Es sey die Gleichung gegeben:

$x^3 + 20x = 7239$, man soll sie in eine andre verwandeln, die ihr Quadratglied bey sich hat.

Sie muß nun allererst auf Null gebracht werden, dann bekommt sie die Form

$$x^3 + 20x - 7239 = 0.$$

Nun setze man z. B. $x = y + 3$, folglich:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 + 9y^2 + 27y + 27 \\ 20x & = & 20y + 60 \\ \hline x^3 + 20x & = & y^3 + 9y^2 + 47y + 87 \\ & & - 7239 \qquad \qquad \qquad - 7239 \\ \hline x^3 + 20x - 7239 & = & y^3 + 9y^2 + 47y - 7152 = 0. \end{array}$$

Es heißt daher die neue Gleichung

$$y^3 + 9y^2 + 47y = 7152$$

Die ungefähre Wurzelgleichung wäre demnach

$$y + 3 = 19$$

$$\text{und } y = 16.$$

Weil nun 16 ein Faktor aus der Zahl 7152 ist, so kann man die Zusammensetzung damit versuchen.

$$\begin{array}{rcl} + 9y^2 & = & + 2304 \\ y^3 & = & 4096 \\ \hline y^3 + 9y^2 + 47y & = & 7152, \text{ wie es vermuthet worden war.} \end{array}$$

Es ist nun ferner $y = 16$

$$\text{und } y = x - 3$$

$$x - 3 = 16$$

$$+ 3 \quad + 3$$

$$x = 19, \text{ eine der 3 Wurzeln}$$

der gegebenen Gleichung: $x^3 + 20x = 7239$.

§. 45.

Versinnlichung dieser Art kubischer Gleichungen durch ein Problem.

Ein Bankier wies einst seinem Sohne, der so eben die Mathematik studirte, eine Hand voll Dukaten mit dem Versprechen, daß er sie ihm schenken wollte, wenn er so viel Algebra verstünde, um sie zu errathen. So eben, sagte er, hatte ich ein ganzes Quadrat voll Dukaten auf dem Tische liegen, wovon ich eine Seite oder die Wurzel hier in der Hand halte. Ich gab einem meiner Freunde 8 Stück vom Quadrat weg, zählte sie dann zusammen, und fand, daß wenn ich mit dem Reste in die Zahl 17368 dividirte, genau wieder die Wurzel des Quadrats zum Vorschein kam. Wie muß es der Junge angeben, um dieses Rekreationsgeldchen einstreichen zu können?

Auflös. Wenn x die Anzahl der Dukaten, die der Wechsler in der Hand hielt, bedeutet, welche mit der Wurzel des Quadrats gleichbedeutend ist, so ergiebt sich sehr natürlich aus der letzten Bedingung die Aequation

$$x = \frac{17368}{x^2 - 8}$$

$$(x^2 - 8) x^3 - 8x = 17368.$$

$$\text{und } x^3 - 8x = 17368 = 0.$$

Um ein Quadratglied hineinzubringen, setze man

$$x = y - 2. \text{ Daher}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\
 8x = 8y - 16 \\
 \hline
 x^3 - 8x = y^3 - 6y^2 + 4y + 8 \\
 - 17368 - 17368 \\
 \hline
 x^3 - 8x - 17368 = y^3 - 6y^2 + 4y - 17360 = 0.
 \end{array}$$

Es heißt demnach unsere neue Gleichung:

$$y^3 - 6y^2 + 4y = 17360.$$

Man stelle die unvollkommne Wurzelgleichung her:

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 6y^2 + 4y \mid y - 2 \\
 + y^3 \\
 \hline
 - 6y^2 + 4y \\
 3y^2 \\
 \hline
 - 6y^2 \\
 + + 12y \\
 - + \\
 \hline
 - 8y + 8
 \end{array}$$

Daher $y - 2 = 25$ bis 26

vers. $y = 27$ bis 28 .

Weil nun 28 ein Faktor vom Zahlengliede 17360 ist, so versuche man getrost die Zusammensetzung die Aequation durch 28. Es kann schwerlich gefehlt seyn.

$$\begin{array}{r}
 y^3 = 21952 \\
 6y^2 = 4804 \\
 \hline
 y^3 - 6y^2 = 17248 \\
 + 4y = + 112 \\
 \hline
 y^3 - 6y^2 + 4y = 17360. \text{ Getroffen!}
 \end{array}$$

Es ist also in der That

$$y = 28$$

aber

$$y = x + 2$$

Folglich

$$x + 2 = 28$$

$$\begin{array}{r} - 2 - 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 26 \text{ Dukaten, die der Ban-}$$

kier in der Hand hielt.

§. 46.

Noch eine solche Aufgabe.

Es soll eine Zahl gefunden werden, deren vierter Theil nebst der Hälfte ihres Kubusses, die Summe 23337 giebt.

Auflös. Die hieher gehörige Gleichung kann keine andre als diese seyn:

$$\frac{x}{4} + \frac{x^3}{2} = 23337$$

$$\text{Geordn. } \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} = 23337$$

$$\times 2 \quad x^3 + \frac{x}{2} = 46674$$

Um den Bruch wegzuschaffen, mache man vor allem die Aequation vollständig, und bringe sie auf Null.

$$x^3 + 0x^2 + \frac{x}{2} - 46674 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 2^0. & 2. & 4. & 8. \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 + 2y - 373392 = 0, \text{ wo } y = 2x \text{ ist.}$$

Nun werde das mangelnde Quadratglied hineingeschafft. Man setze daher z. B. $y = z + 2$.

$$\begin{array}{r}
 \text{Folglich} \quad y^3 = z^3 + 6z^2 + 12z + 8 \\
 \quad \quad \quad + 2y = \quad \quad \quad + 2 + 4 \\
 \hline
 y^3 + 2y = z^3 + 6z^2 + 14z + 12 \\
 - 373392 \qquad \qquad \qquad - 373392 \\
 \hline
 y^3 + 2y - 373392 = z^3 + 6z^2 + 14z - 373380 = 0.
 \end{array}$$

$$\text{Oder } z^3 + 6z^2 + 14z = 373380$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt[3]{\quad} \quad z + 2 = 72 \text{ ungefähr} \\
 \text{und } z = 70.
 \end{array}$$

Und wirklich ist auch die Zahl 70 ein Faktor aus 373380. Man hat also die höchste Wahrscheinlichkeit für sich, daß 70 eine Wurzel unserer Gleichung sei. Die Zusammensetzung wird es lehren.

$$\begin{array}{r}
 z^3 = 343000 \\
 + 6z^2 = + 29400 \\
 + 14z = + 980 \\
 \hline
 z^3 + 6z^2 + 14z = 373380, \text{ wie man vorausge-} \\
 \text{sehen hatte.}
 \end{array}$$

$$\text{also } z = 70$$

$$\text{aber } z = y - 2$$

$$\text{folglich } y - 2 = 70$$

$$\text{und } y = 72.$$

$$\text{Ferner ist } y = 2x$$

$$2x = 72$$

$$: 2 \quad x = 36, \text{ die verlangte Zahl.}$$

§. 47.

Ein kleines Exempel zur Selbstübung.

*Jemand denkt sich eine Zahl, und sagt:
Wenn ich von ihrem Quadrate 4 abziehe, und*

den Rest noch einmal mit ihrer Hälfte multiplizire, so kömmt 10920. Wie heisst sie?

§. 48.

Woraus sich die positiven Wurzeln in einer kubischen Gleichung erkennen lassen.

Die positiven Wurzeln offenbaren sich in einer gut geordneten Gleichung des dritten Grades durch das Abwechseln der Zeichen $+$ und $-$. So viele Abwechslungen vorkommen, so viele positive Wurzeln sind in der Gleichung enthalten. Man sieht dieß zum Theil schon aus der obigen allgemeinen Gleichung §. 26.

$$x^3 - (a + b + c) x^2 + (ab + ac + bc) x - abc = 0,$$

wo die Zeichen dreimal wechseln, und wo die Wurzeln auch alle 3 positiv sind. Indefs kann diese Eigenschaft auch durch ein Beispiel mit Zahlen gezeigt werden. Es sey:

$$x = 2,$$

$$x = 3$$

und $x = 5$, daher die Nullgleichungen:

$$x - 2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$\text{und } x - 5 = 0.$$

Man multiplizire diese 3 Gleichungen wirklich durch einander.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x - 3 \\ \hline x^2 - 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 3x + 6 \\ \hline x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 5 \\ \hline x^3 - 5x^2 + 6x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 5x^2 + 25x - 30 \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0, \text{ wo die}$$

Wahrheit des vorgetragenen Lehrsatzes einleuchtend vor Augen liegt,

§. 49.

Woraus die negativen Wurzeln zu erkennen sind.

Die negativen Wurzeln verrathen sich im Gegentheil durch das Aufeinanderfolgen zweier gleichen Zeichen in einer gutgeordneten Nullgleichung. — Um dieß allgemein zu erweisen, setze man $x = -a$, $x = -b$ und $x = -c$. Daraus ergeben sich die 3 kleinen Nullgleichungen $x + a = 0$, $x + b = 0$ und $x + c = 0$. Ihr Produkt liefert unfehlbar die kubische Aequation:

$$x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc = 0.$$

Multiplirt man die ganze Gleichung durch -1 , so erscheint:

$$\begin{array}{l} -x^3 - (a + b + c)x^2 - (ab + ac + bc)x \\ -abc = 0, \text{ wo die entgegengesetzten Zeichen} \\ \text{auf einander folgen. Diese Gleichung entsteht aber,} \end{array}$$

wenn man $-x = a$, $-x = b$ und $-x = c$ setzt, und dann $-a - x = 0$, $-b - x = 0$, und $-c - x = 0$ durch einander multipliziert, welches alles auf das Nämliche hinausläuft.

Auch ein Beweis in Zahlen soll hier gegeben werden. Man nehme an, es sey $x = 2$, $x = 3$ und $x = -4$. Die daraus hervorgehende Gleichung muß 2 Abwechslungen und 1 Folge der Zeichen geben.

$$\begin{array}{r}
 x = 2 \\
 x = 3 \\
 \hline
 x^2 = 2x \\
 \quad - 3x + 6 \\
 \hline
 x^2 = 5x + 6 \\
 x + 4 \\
 \hline
 x^3 = 5x^2 + 6x \\
 \quad + 4x^2 - 20x + 24 \\
 \hline
 x^3 = x^2 - 14x + 24 = 0,
 \end{array}$$

wo die Zeichen in folgender Ordnung stehen $+ -$, $- -$, $- +$. Man erblickt also wirklich 2 Abwechslungen und 1 Folge derselben.

Zu allem Ueberflusse sollen auch noch diese 3 Gleichungen $x = 2$, $x = -3$ und $x = -4$ oder vielmehr $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$ und $x + 4 = 0$ in einander multipliziert werden, um zu sehen, ob sich zwei Zeichenfolgen und eine Abwechslung in dem Produkt ergeben oder nicht.

$$\begin{array}{r}
 x - 2 \\
 x + 3 \\
 \hline
 x^2 - 2x \\
 \quad + 3x - 6 \\
 \hline
 x^2 + x - 6 \\
 x + 4 \\
 \hline
 x^3 + x^2 - 6x \\
 \quad + 4x^2 + 4x - 24 \\
 \hline
 x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0.
 \end{array}$$

In der That finden sich 2 Zeichenfolgen, und zwischen ihnen ein Zeichenwechsel ein, nämlich $+$ $+$, dann $+$ $-$, endlich $-$ $-$.

§. 50.

Hinausschaffung des Quadratgliedes aus den kubischen Gleichungen.

In jeder gutgeordneten kubischen Nullgleichung kann das Quadratglied, wenn eines vorhanden ist, hinausgeschafft werden: ein Vortheil, der dem Mathematiker bei manchen Gelegenheiten eben so gut zu statten kömmt, als die Einführung dieses Gliedes, wenn die Gleichung keines enthält. Es darf nur die Wurzel um den dritten Theil des Koefficienten vom zweiten Gliede, im Fall dasselbe negativ ist, vermehrt, und wenn es positiv ist, vermindert werden. Um diese Verfahrungsart allgemein zu rechtfertigen, nehmen wir die Gleichung $x^3 - Ax^2 + Bx + C = 0$ als Repräsentant aller kubischen Gleichungen vor die Hand, und schaffen das zweite Glied rechtmässiger Weise so hinaus.

Es sei demnach $x = y + \frac{A}{3}$; daher

$$x^2 = y^2 + \frac{2Ay}{3} + \frac{A^2}{9}$$

$$x^3 = y^3 + Ay^2 + \frac{A^2y}{3} + \frac{A^3}{27}$$

$$- Ax^2 = - Ay^2 - \frac{2A^2y}{3} - \frac{A^3}{9}$$

$$+ Bx = \quad \quad + By + \frac{AB}{3}$$

$$+ C = \quad \quad \quad + C$$

$$x^3 - Ax^2 + Bx + C = y^3 + \left[B - \frac{A^2}{3} \right] y +$$

$$\frac{AB}{3} + \frac{2A^2}{27} + C = 0.$$

§. 51.

Ein Beyspiel in Zahlen, um das allgemeine Verfahren zu beleuchten.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^3 + 9x^2 - 20x - 100 = 0.$$

Hier muß der oben aufgestellten Regel zufolge $x = y - 3$ gesetzt werden, woraus hervorgeht:

$$x^2 = y^2 - 6y + 9.$$

Man setze nun die Aequation ordentlich zusammen.

$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$

$$+ 9x^2 = \quad + 9y^2 - 54y + 81$$

$$- 20x \quad \quad - 20y + 60$$

$$- 100 \quad \quad \quad - 100$$

$$x^3 + 9x^2 - 20x - 100 = y^3 - 47y + 14 = 0.$$

§. 52.

Eine Parallele aus den quadratischen Gleichungen.

Behandelt man die unreinen quadratischen Gleichungen auf eine ähnliche Weise, so kann die gewöhnliche Ergänzung (Complirung) vermieden werden; indem die Gleichung durch die Wegschaffung des 2ten Gliedes *rein quadratisch* wird. Es muß aber gemäß dem Binomialgesetz hier die Wurzel um die Hälfte des Koefficienten vom zweyten Gliede vermehrt oder vermindert werden. Z. B. in der Gleichung $x^2 - 6x - 832 = 0$. Man setze $x = y + 3$, so ergibt sich folgende Zusammenstellung einer neuen Aequation, wo das zweyte Glied ausbleiben wird.

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 & = & y^2 + 6y + 9 \\
 - 6x & = & - 6y - 18 \\
 - 832 & & - 832 \\
 \hline
 x^2 - 6x - 832 & = & y^2 - 841 = 0
 \end{array}$$

$$\text{Oder } y^2 = 841$$

$$\sqrt{\quad} \quad y = \pm 29$$

$$\text{Aber } y = x - 3$$

$$x - 3 = \pm 29$$

$$\text{versetzt } x = 32$$

$$\text{oder } x = -26.$$

Ich kann mich nicht enthalten, hier ein kleines Problem nach der eben beschriebenen Methode aufzulösen.

Der Fußboden eines Zimmers hält 768 Quadratschuh, und ist um 8 Schuh länger als breit. Was hat er für zwey Abmessungen? oder wie lang und wie breit ist das Zimmer?

Auflös. Nennt man die Breite des Zimmers $= x$, so ist dessen Länge $= x + 8$, und der Quadratinhalt des Bodens $(x + 8) x = x^2 + 8x$.

Daher die unfehlbare Gleichung:

$$x^2 + 8x = 768, \text{ oder } x^2 + 8x - 768 = 0.$$

Ich nehme an $x = y - 4$, folglich

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 - 8y + 16 \\ + 8x & & + 8y - 32 \\ \hline x^2 + 8x & = & y^2 - 16 \\ - 768 & & - 768 \\ \hline x^2 + 8x - 768 & = & y^2 - 784 = 0. \end{array}$$

$$\text{Das ist } y^2 = 784$$

$$\sqrt{\quad} \quad y = \pm 28$$

$$y = x + 4$$

$$x + 4 = 28$$

$$- 4 \quad - 4$$

$$x = 24$$

Die Länge des Zimmers ist demnach $24 + 8 = 32$, weil die Breite 24 Schuh beträgt.

Und auch ein Problemchen dieser Art zur Uebung für den Leser!

Ein Gewinn von 418 fl. wurde unter etliche Personen gleich vertheilt, Es bekam jede 3 fl. weniger, als Köpfe es in allen waren. Was

bekam eine Person, und wie viel Personen waren es?

§. 53.

Allgemeiner Ueberblick aller unreinen kubischen Gleichungen, denen das Quadratglied mangelt, und Nutzen derselben.

Wenn in einer unreinen kubischen Gleichung das Quadratglied entweder an und für sich schon mangelt, oder auf die so eben vorgetragene Methode hinausgeschafft worden, dann hat sie nothwendig eine der nachstehenden Formen:

$$1. \quad x^3 \mp Px - Q = 0$$

$$2. \quad x^3 - Px \mp Q = 0$$

$$3. \quad x^3 - Px - Q = 0.$$

Sie dienen, um die Schranken zu bestimmen, zwischen welche die Wurzeln einer jeden Gleichung hineinfallen.

§. 54.

Bestimmung der Schranken für die erste Form der kubischen Gleichungen.

Jede der 3 Wurzeln einer kubischen Gleichung, die unter der ersten Form $x^3 \mp Px - Q = 0$ begriffen ist, ist kleiner als die Kubikwurzel aus dem letzten Gliede, und grösser als der Quotient, welcher entsteht, wenn das obbemeldte Glied durch die Summe des Koeffizienten vom zweyten Gliede und der Kubikwurzel aus dem Quadrate des letzten Gliedes dividirt wird.

S ä t z e:

$$\text{I. } x < \sqrt[3]{Q} \quad \text{II. } x > \frac{Q}{P + \sqrt[3]{Q^2}}$$

B e w e i s:

I.

Es ist hier $x^3 + Px - Q = 0$ vers. $x^3 + Px = Q.$

Wird nun zur Linken eine Grösse abgezogen, so muß nothwendig diese Seite kleiner werden, als die rechte, das ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 & < & Q \\ \sqrt[3]{} & x & < \sqrt[3]{Q} \end{array}$$

II.

So eben ward erwiesen, dafs

$$\begin{array}{rcl} & x & < \sqrt[3]{Q} \\ \text{quad.} & x^2 & < \sqrt[3]{Q^2} \\ \times x & x^3 & < x\sqrt[3]{Q^2} \end{array}$$

Wird nun in der Gleichung $x^3 + Px = Q$ statt x^3 etwas grössers, z. B. $x\sqrt[3]{Q^2}$ substituirt, so muß eben darum die ganze Seite linker Hand grösser als die andre werden. Daher

$$\begin{array}{l} x\sqrt[3]{Q^2} + px > Q \\ \text{zerfällt } x [P + \sqrt[3]{Q^2}] > Q \\ : (P + \sqrt[3]{Q^2})^3 \quad x > P + \sqrt[3]{Q^2} \end{array}$$

§. 55.

Modifizirung der letztern Schranke.

Bedeutet x keinen eigentlichen Bruch, sondern mehr als die Einheit, welches doch meistens der Fall ist, dann kann mit mehr Annäherung behauptet werden, dass jede der 3 Wurzeln kleiner seyn wird, als die Kubikwurzel aus der Differenz, die sich ergibt, wenn vom letzten Gliede der Koeffizient des zweyten Gliedes abgezogen wird.

S a t z:

$$x < \sqrt[3]{(Q - P)}$$

B e w e i s:

$$x^3 + Px = Q$$

$$- Px - P$$

$$\hline x^3 < Q - P$$

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{(Q - P)},$$

§. 56.

Ein Beyspiel zur Anwendung.

Problem. Gibt es eine Zahl, die sich zu 10 gerade so verhält, wie 27 zu dem um 9 vermehrten Quadrate dieser Zahl, und welche ist sie im Bejahungsfalle?

Auflös. Die Proportion heisst unfehlbar so:

$$x : 10 = 27 : (x^2 + 9)$$

$$x^3 + 9x = 270$$

$$\text{vers. } x^3 + 9x - 270 = 0.$$

Bestimmung der Schranken.

$$x < \sqrt[3]{(270 - 9)} = \sqrt[3]{261} = 6,3 \dots$$

$$x > \frac{270}{9 + \sqrt[3]{270^2}} = \frac{270}{50,7} = 5,3 \dots$$

Da nun die unbekannte Grösse grösser als 5,3 und kleiner als 6,3 seyn muss, so ist nichts natürlicher, als dass 6 selbst diese Zahl vorstellt. Lässt uns sehen, ob die Proportion durch 6 Gültigkeit erhält!

$$\begin{aligned} 6 : 10 &= 27 : (36 + 9) \\ \text{oder} \quad 3 : 5 &= 3 : 5. \end{aligned}$$

Es ist also das Problem durch die Zahl 6 wirklich gelöst. Die weitere Untersuchung lehrt, dass die beyden übrigen Wurzeln eingebildete Grössen sind. Denn $(x^3 + 9x - 270) : (x - 6) = x^2 + 6x + 45 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 6x & = & -45 \\ + 9 & + & 9 \\ \hline x^2 + 6x + 9 & = & -36 \\ \sqrt{\quad} \quad x + 3 & = & \pm \sqrt{-36} \\ x & = & -3 \pm \sqrt{-36}. \end{array}$$

§. 57.

Ein ähnliches Problem zur Selbstübung.

Ich denke mir eine Zahl, sagte jüngst ein mathematischer Freund zu mir, wenn ich zu ihrem Quadrate 17 addire, und die Summe durch die besagte Zahl multiplicire, so erhalte ich das Produkt 22428. Wie heisst meine Zahl?

§. 58.

Bestimmung der beyden Wurzelschranken für die zweyte Form.

Gehört die gegebene Gleichung unter die zweyte Form $x^3 - Px + Q = 0$, so sind die Wurzeln kleiner als die Quadratwurzel aus dem Koeffizienten des zweyten Gliedes, und gröfser als der Quotient, den man erhält, wenn das dritte Glied durch besagten Koeffizienten dividirt wird. Algebraisch drückt man dies so aus:

S ä t z e:

$$\text{I. } x < \sqrt{P} \quad \text{und II. } x > \frac{Q}{P}$$

B e w e i s.

I.

$$x^3 - Px + Q = 0$$

$$\text{oder } x^3 + Q = Px$$

$$- Q$$

$$x^3 < Px$$

$$: x \quad x^2 < P$$

$$\sqrt{x} < \sqrt{P}$$

II.

$$x^3 - Px + Q = 0$$

$$\text{vers. } - Px + Q = -x^3$$

$$\text{oder } Px - Q = x^3$$

$$\text{vers. } Px = Q + x^3$$

$$\text{Das ist } Px > Q$$

$$: P \quad x > \frac{Q}{P}$$

§. 59.

Versinnlichung durch ein Problem.

Wie viel Stücke Wild hast du heute niedergestreckt? fragte nach geendigter Jagd ein Forstschüler den andern. Die Antwort war: Wenn du die Anzahl der von mir erlegten Thiere mit 24 multiplicirst und vom Produkte 45 abziehst, dann bekömmst du gerade den Kubus derselben. Wie muß man diese Zahl herausziffern?

Auflös. Es waren x Stücke; daher die unfehlbare Gleichung:

$$24x - 45 = x^3$$

$$\text{Umgesetzt } x^3 = 24x - 45$$

$$\text{Geordnet. } x^3 - 24x + 45 = 0.$$

Die Schranken bestimmt. Es ist hier $P = 24$ und $Q = 45$

$$\text{Also } x < \sqrt{24} = 4,9 \dots$$

$$\text{und } x > \frac{45}{24} = 1,8 \dots$$

Da nun die Zahl 3 ein Faktor aus 45 ist, so darf man gar nicht zweifeln, daß sie eine Wurzel der Gleichung sey. Man versuche demnach die Zusammensetzung der Aequation damit.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & 27 \\
 - 24x & = & - 72 \\
 \hline
 x^3 - 24x & = & - 45 \\
 + 45 & & + 45 \\
 \hline
 x^3 - 24x + 45 & = & 0.
 \end{array}$$

Die Vermuthung hat sich also vollkommen bestätigt.

Man forsche nun auch nach den übrigen beyden Wurzeln; um zu erfahren, ob das Problem bestimmt oder unbestimmt sey.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 24x + 45 \quad | \quad x^2 + 3x - 15 \\
 (x - 3) \quad | \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 3x^2 - 24x \\
 (x - 3) \\
 \hline
 3x^2 - 9x \\
 \hline
 + \\
 \hline
 - 15x + 45 \\
 (x - 3) \\
 \hline
 - 15x + 45 \\
 \hline
 + \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Es ist also $x^2 + 3x = 15$

Ergänzt

$$\begin{array}{r}
 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \\
 \hline
 x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{69}{4}
 \end{array}$$

✓

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{69}}{2}$$

vers.

$$x = \pm \frac{\sqrt{69}}{2} - 3$$

Es sind demnach die beyden andern Wurzeln theils *irrational* theils *negativ*; zwey Eigenschaften die sie unfähig machen, das Problem aufzulösen. Die erlegten Thiere waren folglich nicht mehr und nicht weniger als *drey*.

Da irrationale Wurzeln für die mehrsten kubischen Probleme keinen Sinn haben, so hat auch meistens nur eine einzige Auflösung statt, und die Aufgaben dieser Art gehören größtentheils in die Kategorie der bestimmten Probleme.

§. 27.

Eine ähnliche Aufgabe zur Selbstübung

Problem. *Wie viel Gulden haben Sie heute gewonnen? fragte ein Spieler den andern beym Zusammenwerfen der Karten. Wenn ich ein ganzes Jahr lang alle Wochen so viel gewänne als heute, antwortete der Gewinnende, so hätte ich zu Ende des Jahres um 21 fl. mehr als der Kubus meines heutigen Gewinns beträgt. Was war wohl sein Gewinn?*

§. 61.

Allgemeine Bestimmung der Wurzelschranken für die dritte Form der Gleichungen.

In den kubischen Gleichungen der dritten Form $x^3 - Px - Q = 0$ sind die Kubikwurzeln kleiner als die Quadratwurzel aus der Summe des letzten Gliedes und des Koefficienten vom zweyten Gliede, im Fall x mehr als 1 bedeutet. Sie ist hingegen größer als die Kubikwurzel aus dem letzten Gliede, oder als die Quadratwurzel aus dem Koefficienten des zweyten Gliedes.

S ä t z e

$$\text{I. } x < \sqrt{P + Q} \quad \text{II. } x > \sqrt[3]{Q} \text{ od. } > \sqrt{P}$$

B e w e i s e.

I.

$$\begin{array}{lcl}
 & x^3 - Px = Q \\
 : x & x^2 - P < Q \\
 \text{vers.} & x^2 < P + Q \\
 \sqrt{} & x < \sqrt{P + Q}
 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{lcl}
 & x^3 - Px = Q \\
 & + Px \\
 \hline
 & x^3 > Q \\
 \sqrt[3]{} & x > \sqrt[3]{Q}
 \end{array}$$

Oder

$$\begin{array}{lcl}
 & x^3 - Q = Px \\
 & = Q \\
 \hline
 & x^3 > Px \\
 : x & x^2 > P \\
 \sqrt{} & x > \sqrt{P}
 \end{array}$$

§. 62.

Ein hieher gehöriges Problem nebst Auflösung desselben.

Die Stärke des Personals in irgend einem neuorganisirten Bureau drückte ein Mathematiker so aus. „Das Quadrat desselben weniger 10 verhält sich zur Zahl 8 gerade so, wie 201 zum Personal selbst.“ Aus wie viel Köpfen besteht es wohl?

Auflös. Das Personal besteht aus x Köpfen; daher die Proportion:

$$[x^2 - 10] : 8 = 201 : x$$

$$x^3 - 10x = 1608$$

Geord. $x^3 - 10x - 1608 = 0.$

In diesem Beyspiel ist $P = 10$ u. $Q = 1608.$

Folglich $x < \sqrt{(1608 + 10)} = \sqrt{1618} = 40,2 \dots$ und $x > \sqrt[3]{1608} = 11,7 \dots$

Nun sind die Faktoren der Zahl 1608, die zwischen beyde Schranken hineinfallen: 12 und 24. Man mache also mit den ersten einen Versuch.

$$\begin{array}{r} x^3 = 1728 \\ - 10x = -120 \\ \hline x^3 - 10x = 1608. \text{ Also errathen!} \end{array}$$

Noch übrig die Untersuchung, ob es nicht auch andere Zahlen giebt, die den Bedingungen des Problems ein Genüge leisten.

$$x^3 - 10x - 1608 \quad | \quad x^2 + 12x + 134 = 0$$

$$(x - 12)$$

$$x^3 - 12x^2$$

$$- +$$

$$12x^2 - 10x$$

$$(x - 12)$$

$$12x^2 - 144x$$

$$- +$$

$$134x$$

$$(x - 12)$$

$$134x - 1608$$

$$- +$$

$$0$$

Wirft man nun 134 mit negativen Zeichen auf die Gegenseite, und ergänzt die Gleichung durch 36,

als das Quadrat von $\frac{1}{2}^2 = 6$, so bleibt die rechte Seite noch immer negativ, und die beyden andern Wurzeln sind wieder unmöglich.

§. 63.

Auch ein solches Problem zur Nachahmung.

Der reiche Stax besitzt einen Obstgarten, der ein vollkommenes Quadrat bildet, das heisst, jede Reihe hat so viele Bäume als es Reihen sind. Eines Tages riss ihm der benachbarte Fluß ein Eck vom Garten mit 11 Bäumen fort, und seither ist der Rest so oft in der Zahl 2363 enthalten, als viele Paar Bäume in einer ganzen Reihe sind. Es soll nun aus diesen Angaben auf seinen Gartenbestand geschlossen werden.

§. 64.

Kurze Zusammenfassung alles dessen, was bis daher von den kubischen Gleichungen abgehandelt worden, und vorläufige Anzeige von dem, was in der Folge noch hierüber gelehrt werden soll.

Nachdem anfänglich gesagt worden ist, was man eigentlich unter unreinen kubischen Gleichungen verstehe, und wie viele Wurzeln jede enthalte; nachdem ich sie in ergänzbare und unergänzbare eingetheilt, und ihre Kennzeichen angegeben habe; wagte ich es, ein und anders Problem der ersten Abtheilung aufzulösen. Ich setzte hierauf die Natur der Gleichungen vom dritten Grade und

ihrer Wurzeln mit möglichster Deutlichkeit auseinander, und leitete daraus praktische Regeln ab, wie einige hieher gehörige Probleme, schon durch Hilfe der aufgezählten Eigenschaften allein schon zu berechnen seyen. Im Verfolge dieses Artikels machte ich einen bis daher noch unbekannten Vortheil bekannt, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine Menge unergänzbarer Aequationen dieser Art zu entziffern. Ich zeigte auch nebenher, wie die Brüche aus den Gleichungen weggeschafft, und demungeachtet das erste Glied rein erhalten; wie die Wurzeln trotz ihrer Unbekanntheit nach Belieben vermehrt und vermindert, multipliziert und dividirt werden können; wie man im Stande sey, das Quadratglied nach Erforderniß auszumerzen oder herzustellen. Ferner wurden alle unreinen, unergänzbaren, kubischen Gleichungen auf 3 Klassen zurückgeführt, und für jede Klasse allgemein die Schranken bestimmt, zwischen welche die Wurzeln jedesmal nothwendig hineinfallen.

Während dieser Theorie arbeitete ich verschiedene kubische Probleme aus, die immer so gewählt worden sind, daß sie zu den so eben vorgetragenen Lehren passen, und stellte sogar ähnliche Beyspiele zur Selbstübung des Lesers auf. Nun werde ich, was die letzte Maafsregel betrifft, umgekehrt zu Werke gehen, und etliche Probleme ohne Ordnung auf einander folgen lassen, um selbst beurtheilen zu müssen, in welche Kategorie sie gehören, und durch welche Methode sie am natürlichsten aufzulösen sind. — Den Beschluß macht dann die Behandlung der ir-

rationalen, unreinen Gleichungen vom dritten Grade, und endlich eine ausführliche Darstellung der sogenannten Cardaniregel und ihre Anwendung auf einige der vorausgehenden Probleme.

§. 65.

Erstes Problem zur Anwendung der bisher gegebenen Regeln.

Ein Kapital von 62500 fl. wurde so angelegt, daß jedes Jahr die Interessen dazugeschlagen, und ebenfalls verzinset werden sollten. Zu Ende des dritten Jahrs geschah die Aufkündigung, und der Schuldner mußte in Allem 74438 fl, 30 kr. erlegen. Zu wie viel Prozent ist dieses Kapital wohl aufgelegt worden?

Auflös. Ich antworte hierauf: Das Kapital wurde zu x Prozent ausgeliehen, und berechne die Zinsen für das erste Jahr durch die Regel Detri:

fl.	fl.	fl.
100	x	62500

Antw. $625x$

Im zweyten Jahr ist demnach das Kapital schon $62500 + 625x$. Nun berechne ich auch die Zinsen für das zweyte Jahr.

fl.	fl.	fl.
100	x	$62500 + 625x$

Antw. $\frac{62500x + 625x^2}{100}$ fl.

100

welcher Ausdruck durch die Abkürzung mit 25 sich in diesen verwandelt:

$$\frac{2500x + 25x^2}{4}$$

Das Kapital war demnach im dritten Jahre

$$62500 + 625x + \frac{2500x + 25x^2}{4}$$

$$= \frac{250000 + 2500x + 2500x + 25x^2}{4}$$

$$= \frac{250000 + 5000x + 25x^2}{4}$$

Endlich suche ich auch einen Ausdruck für die Zinsen des dritten Jahres.

fl.	fl.	fl.
100	x	$\frac{250000 + 5000x + 25x^2}{4}$

$$\text{Antw. } \frac{250000x + 5000x^2 + 25x^3}{400}$$

$$= \frac{10000x + 200x^2 + x^3}{16}$$

Zuletzt addire ich diese Interessen zum Kapital des 2ten Jahres.

$$\frac{250000 + 5000x + 25x^2}{4} + \frac{10000x + 200x^2 + x^3}{16} =$$

$$\frac{1000000 + 20000x + 100x + 10000x + 200x^2 + x^3}{16} =$$

$$\frac{x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000}{16}$$

Daher die kubische Gleichung:

$$\frac{x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000}{16} = 74438\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000}{8} = 148877$$

$$\frac{x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000}{1000000} = 1191016$$

$$\frac{x^3 + 300x^2 + 30000x}{1000000} = 191016$$

Man ziehe linker Hand die Wurzel aus:

$$\begin{array}{r} x^3 + 300x^2 + 30000x \quad | \quad x + 100 \\ \underline{x^3} \\ 300x^2 + 30000x \\ \underline{(3x^2)} \\ 300x^2 + 30000x + 1000000 \\ \underline{ + 1000000} \\ \end{array}$$

Zu allem Glücke ist also diese unreine kubische Gleichung ergänzbar; denn man darf nur den Kubus von 100, den ich oben abgezogen habe, wider beyderseits addiren. Man erhält

$$\begin{array}{r} x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000 = 1191016 \\ \sqrt[3]{} \quad x + 100 = 106 \\ \phantom{\sqrt[3]{}} \quad \underline{- 100 \quad - 100} \\ \phantom{\sqrt[3]{}} \quad \quad \quad x = 6 \end{array}$$

Das Kapital war hiemit zu 6 Prozent ausgelegt.

Anstatt die Probe über dieses Exempel zu machen, soll dasselbe auf einen andern und kürzern Weg gerechnet werden.

Man hat bekanntlich für diese Art Interessenrechnungen die bequeme Formel $\left[\frac{c + p}{c} \right]^n x = f$,

wo $c = 100$, p das Prozent, n die Anzahl der Jahre, während das Kapital k ausgelegt worden, und f die Summe bedeutet, zu der dasselbe in n Jahren angewachsen ist. Hier in der gegenwärtigen Aufgabe kennt man alle Grössen bis auf p . Daher muß allererst die Formel gewendet werden, um p allein erscheinen zu machen. Man erhält daher:

$$p = c \sqrt[n]{\frac{f}{k}} - c, \text{ und auf unser Bey-}$$

spiel angewendet,

$$\begin{aligned} x &= 100 \sqrt[3]{\frac{74438 \frac{1}{2}}{62500}} - 100 \\ &= 100 \sqrt[3]{\frac{148877}{125000}} - 100 \end{aligned}$$

Der Minuend läßt sich am besten logarithmisch berechnen.

$$\begin{array}{rcl} \text{L. } 148877 & = & 5.1728276 \\ \text{L. } 12500 & = & 5.0969100 \\ & & \hline & & 0.0759176 \\ & : 3 & \\ & & 0.0253059 \\ \text{L. } 100 & = & 2. \\ & & \hline & & 2.0253059 = \text{L. } 106. \end{array}$$

Folglich $x + 106 - 100 = 6$ Prozent.

§. 66.

Zweytes Problem, die bisherigen Regeln anzuwenden.

Man kennt von einer stätigen geometrischen Proportion die Summe der beyden ersten Glieder und das letzte Glied; es soll der Exponent ausgemittelt werden. Die Summe der beyden ersten Glieder ist z. B. 42 und das letzte Glied 175. Was ist der Exponent?

Auflös. Es ist eine ausgemachte Wahrheit, daß jede in 3 Gliedern ausgedrückte, stättige, geometrische Proportion als eine geometrische Progression betrachtet werden könne. In jeder Progression dieser Art haben aber die zwey Formeln Statt:

$$a = \frac{u}{qn - 1}$$

$$\text{und } a = \frac{qu - s[q - 1]}{q - 1}, \text{ woraus}$$

$$\text{hervorgeht: } qu - qs + s = \frac{u}{qn - 1}$$

In unserm Beyspiel ist

$$q = x$$

$$u = 175$$

$$s = 42 + 175 = 217$$

$$\text{und } n = 3.$$

$$\text{Daher } 175x - 217x + 217 = \frac{175}{x^2}$$

$$\text{Abgek.} \quad - 42x + 217 = \frac{175}{x^2}$$

$$\times x^2 \quad - 42x^2 + 217x = 175$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Gut geord.} & 42x^3 - 217x^2 + 175 = 0 \\
 : 7 & 6x^3 - 31x^2 + 25 = 0 \\
 : 6 & x^3 - \frac{31x^2}{6} + \frac{25}{6} = 0.
 \end{array}$$

Um die beyden Brüche wegzuschaffen, gebe man der Gleichung folgende Form der Vollständigkeit, und multiplizire sie mit den bekannten Würden von 6.

$$x^3 - \frac{31x^2}{6} + 0x + \frac{25}{6} = 0$$

$$6.^o \quad 6. \quad 36. \quad 216.$$

$$y^3 - 31y^2 + 900 = 0, \text{ wo } y = 6x \text{ bedeutet.}$$

Wollte man hier das Quadratglied hinausschaffen, um die Schranken zu bestimmen, zwischen welche die Wurzel hineinfällt, so würden neue und zwar ungleich grössere Brüche entstehen, als man so eben weggebracht hat.

Man versuche also den Wurzelauszug, um einige Schlüsse machen zu können.

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 31y^2 + 900 \quad | \quad y - 10 = 0 \\
 - y^3 \quad \quad \quad | \quad y = 10. \\
 \hline
 - 31y^2 + 900 \\
 (3y^2) \\
 \hline
 - 30y^2 + 300y - 1000 \\
 + \quad \quad \quad + \\
 \hline
 - y^2 - 300y + 1900
 \end{array}$$

Durch die Beurtheilung des Restes wird man in Stand gesetzt, die Gleichung einigermassen zu ergänzen. Man sieht

1) dafs der algebraische Ausdruck sowohl um y^2 als um 300y zu klein; hingegen

2) um die Zahl 1900 zu grofs ist.

Es mufs demnach beyderseits das Mangelnde hinzugethan, und das Ueberflüssige beyderseits weggenommen werden.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 - 31y^2 & + & 900 = 0 \\
 & + & y^2 = + 100 \\
 & + & 300y = + 3000 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y & = & 3100 \\
 & - & 1900 = 1200 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 & = & 1200 \\
 \sqrt[3]{} & y - 10 = 10, \\
 & y = 20.
 \end{array}$$

Will man der wahren Wurzel noch näher auf die Spur kommen, so ergänze man die Nullgleichung mit $y = 20$.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 - 31y^2 & + & 900 = 0 \\
 & + & y^2 = + 400 \\
 & + & 300y = + 6000 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y + 900 & = & 6400 \\
 & - & 1900 = 4500 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 & = & 4500 \\
 \sqrt[3]{} & y - 10 = 25, \\
 \text{und } y & = & 25.
 \end{array}$$

Man ergänze noch einmal mit $y = 25$

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 - 31y^2 & + & 900 = 0 \\
 + y^2 & & = + 625 \\
 & + 300y & = + 7500 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y + 900 & = & 8125 \\
 & - 1900 & = 1900 \\
 \hline
 y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 & = & 6225 \\
 y - 10 & = & 19. \\
 y & = & 29.
 \end{array}$$

Weil nun 30 ein Faktor aus 900 ist, so kann man nichts natürlicheres finden, als dafs die wahre Wurzel 30 seyn müsse. Man versichere sich davon entweder durch Zusammenstellung der Gleichung mit $y = 30$, oder durch eine nochmalige Ergänzung. Ich wähle mit Fleifs das letztere.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 - 31y^2 + 900 & = & 0 \\
 + y^2 & + & 900 \\
 & + 300y & + 9000 \\
 \hline
 y^3 + 30y^2 + 300y + 900 & = & 9900 \\
 & - 1900 + 1900 & \\
 \hline
 y^3 + 30y^2 + 300y - 1000 & = & 8000
 \end{array}$$

$\sqrt[3]{}$

$$y - 10 = 20$$

$$+ 10 + 10$$

$$y = 30$$

aber

$$y = 6x$$

also

$$6x = 30$$

: 6

$$x = 5, \text{ der gesuchte Exponent}$$

der Proportion oder Progression.

Um dns Problem vollkommen aufzulösen, muß nun auch das erste Glied bestimmt werden. Diefs zu

leisten, darf nur in der allererst angesetzten Formel

$a = \frac{u}{q^n - 1}$ substituirt werden, und man erhält:

$$x = \frac{175}{5^3 - 1} = \frac{175}{5^2} = \frac{175}{25} = 7.$$

Die stättige] geometrische Proportion ist demnach diese:

$$7 : 35 : 175.$$

§. 67.

Auflösung des nämlichen Problems durch eine unreine quadratische Gleichung.

Sonderbar scheint es immerhin, dafs sich ein und das nämliche Problem sowohl durch eine kubische als quadratische Gleichung lösen läfst. Mir sind nur äusserst seltene Fälle, oder beym Lichte beschaut, eigentlich noch gar kein solcher Fall begegnet. Und doch ist das oben aufgeworfene Problem wirklich von dieser Art.

Denn man nenne das erste Glied $= x$ und den Exponenten y , so wird sich die stättige Proportion so bilden

$x : xy : xy^2$, woraus die zwey Gleichungen abstammen:

I.

$$xy^2 = 175$$

$$x + \frac{175}{y^2}$$

II.

$$x + xy = 42.$$

$$x = \frac{42}{1 + y}$$

III.

$$\frac{42}{1+y} = \frac{175}{y^2}$$

$$42y^2 = 175 + 175y$$

$$\text{vers.} \quad 42y^2 - 175y = 175$$

$$: 42 \quad y^2 - \frac{175}{42}y = \frac{175}{42}$$

$$\text{Ergänzt} \quad y^2 - \frac{175}{42}y + \left[\frac{175^2}{84} \right] = \frac{175}{42} + \frac{30625}{7056}$$

$$\text{Oder} \quad y^2 - \frac{175}{42}y + \left[\frac{175^2}{84} \right] = \frac{60025}{7056}$$

$$\sqrt{\quad} \quad y - \frac{175}{84} = \frac{245}{84}$$

$$\text{und} \quad y = \frac{420}{84} = 5.$$

§. 68.

Drittes Problem zur Anwendung der vorgetragenen Methode.

Eine junge Griechin fragte das Orakel zu Delphos, wie lange sie noch bis zu ihrer Verheleichung warten müsse? Die Antwort lautete so: „Wirf 3 Jahre von deinem jetzigen Alter hinweg, und kubire das Uebrige. Von der „Hälfte dieses Kubusses ziehe das dreyfache „Alter ab, und theile den Rest durch 9. Der „Quotient giebt die Anzahl der Jahre, die Du „noch warten mußt.“ Das Mädchen liefs sich diesen Orakelspruch auslegen, und als es hören mußte, dafs noch 21 Jahre bis zu diesen glück-

lichen Zeitpunkte verfließen würden, stürzte es sich aus Verzweiflung ins Meer. Wie alt war es damals?

Auflös. Sie war x Jahre alt; daher die Skitze der Aequation

$$\frac{\frac{[x - 3]^3}{2} - 3x^2}{9} = 21.$$

Wirkl. bearb. $\frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - 3x^2}{2} = 189$

$$\times 2 \quad x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - 6x^2 = 378$$

$$\text{Abgek.} \quad x^3 - 15x^2 + 27x = 405.$$

Man ziehe die Kubikwurzel beyderseits oberflächlich aus, so erscheint,

$$x - 5 = 7,4 \dots$$

$$\text{und} \quad x = 12,4 \dots;$$

woraus sich zugleich ergibt, dafs auf der rechten Seite $48x$ mangeln, und um 125 Einheiten zu viel sind. Man setze $x = 13$ und ergänze wieder

$$\begin{array}{r} x^3 - 15x^2 + 27x = 405 \\ \quad \quad \quad + 48x = + 624 \\ \hline x^3 - 15x^2 + 75x = 1029 \\ \quad \quad \quad - 125 = - 125 \\ \hline x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 904 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\quad} \quad x - 5 = 9,6 \dots$$

$$x = 14,6.$$

Da nun 15 ein Faktor aus 405 ist, so prüfe man diese Zahl durch eine neue Ergänzung oder durch Zusammensetzung. Ich wähle das Erstere.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 15x^2 + 27x & = & 405 \\
 + 48x & = & +720 \\
 \hline
 x^3 - 15x^2 + 75x & = & 1125 \\
 - 125 & = & -125 \\
 \hline
 x^3 - 15x^2 + 75x - 125 & = & 1000
 \end{array}$$

 $\sqrt[3]{}$

und

sagte.

$$x - 5 = 10$$

$$x = 15 \text{ Jahre, wie die Vermuthung}$$

§. 69.

Viertes Problem zur Anwendung der bisherigen Regeln.

Ich besaß vor Kurzem ein viereckichtes Kästchen von dünnem Bleche, das 648 Kubikzolle faßte. Die Ueberziehung dieses Kästchens mit Papier fordert eine Fläche von 468 Quadratollen. Wollte ich es mit einem Bindfaden kreuzweise umschlingen, so mußte ich 54 Zoll in der Länge haben. Wie lang, wie breit, und wie hoch war dieses Kästchen?

Auflös. Man nenne die Länge des Kästchens $= x$, die Breite $= y$ und die Höhe $= z$ Zoll. Die 3 Gleichungen können demnach keine anderen als folgende seyn:

I.

$$xyz = 648$$

II.

$$2[y + xz + yz] = 468$$

III.

$$2[x + y + z] = 54$$

Nach Hinwegschaftung der beyden Koefficienten in den letztern zwey Gleichungen haben sie diese Gestalt

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \text{II.} \\ xyz = 648 & xy + xz + yz = 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{III.} \\ x + y + z = 27. \end{array}$$

Um eine Weile fort in der Allgemeinheit zu kalkuliren, lasse man $648 = a$, $234 = b$ und $27 = c$ gelten. Daher die Ausdrücke und der fernere Kalkul:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ xyz = a & xy + xz + yz = b & x + y + z = c \\ z = \frac{a}{xy} & z = \frac{b - xy}{x + y} & z = c - x - y \end{array}$$

Wollte man hier nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra verfahren, so käme man auf Wurzel-
ausdrücke, denen nicht mehr auszuweichen wäre.
Man muß sich also einen neuen Weg bahnen, der
in folgender Wendung besteht.

$$\begin{array}{c} \text{IV.} \\ c - x - y = \frac{a}{xy} \\ \times y \quad cy - xy + y^2 = \frac{a}{x} \end{array}$$

V.

$$c - x - y = \frac{b - xy}{x + y}$$

$$\times (x + y) \quad cx - x^2 - xy + cy - xy - y^2 = b - xy$$

$$\text{abgek.} \quad cx - x^2 + cy - xy - y^2 = b$$

$$\text{vers.} \quad cy - xy - y^2 = b + x^2 - cx$$

VI.

$$\text{Es war vorher } cy - xy - y^2 = \frac{a}{x}$$

$$\text{Nun ist jetzt } \underline{cy - xy - y^2 = b + x^2 - cx}$$

$$\text{Folglich auch } b + x^2 - cx = \frac{a}{x}$$

$$\times x \quad bx + x^3 - cx^2 = a$$

$$\text{Geordn.} \quad x^3 - cx^2 + bx = a.$$

So weit in der Allgemeinheit. Nun setze man wieder für a , b und c ihre Werthe, und man erhält:

$$x^3 - 27x^2 + 234x = 648.$$

Ungefährer Wurzelauszug.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 27x^2 + 234x & x - 9 = 8,5 \dots \\ \underline{-x^3} & x = 17,5 \dots \\ & (3x^2) \\ \hline & -27x^2 + 243x \\ & + \\ \hline & -729 \\ & + \\ \hline & -9x + 729 \end{array}$$

Es mangeln also noch $9x$ und es sind um 729 Einheiten zu viel da. Man berichtige demnach die Gleichung, und setze $x = 18$.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 27x^2 + 234x & = & 648 \\
 + 9x & = & + 162 \\
 \hline
 x^3 - 27x^2 + 258x & = & 810 \\
 - 729 & = & - 729 \\
 \hline
 x^3 - 27x^2 + 243x - 729 & = & 91
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{x - 9 = 4,5 \dots} \\
 x = 13,5 \dots
 \end{array}$$

Daraus folgt, daß die Wurzel noch um etwas kleiner als 13,5 . . seyn müsse, weil durch die Berücksichtigung der Aequation der Werth von x abgenommen hat. Wenn man nun bedenkt, daß 12 ein Faktor aus dem Zahlengliede 648 ist, so scheint das ein sicheres Zeichen zu seyn, daß man sich in der Wahl dieser Wurzel nicht viel irren werde. Also zur Probe. Für $x = 12$ ist:

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & 1728 \\
 - 27x^2 & = & - 3888 \\
 \hline
 x^3 - 27x^2 & = & - 2160 \\
 + 234x & = & + 2808 \\
 \hline
 x^3 - 27x^2 + 234x & = & 648
 \end{array}$$

Die Sache hat also ihre Richtigkeit. Man weiß jetzt, daß das Kästchen 12 Zoll lang war. Noch übrig, die Breite und Höhe auszumitteln. Man substituirt demnach in der ersten und letzten Gleichung für x die Zahl 12, und es geht hervor:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I.} & & \\
 12yz = 648 & & \\
 : 12 & yz = 54 & \\
 & z = \underline{54} & \\
 & y &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{II.} & & \\
 12 + y + z = 27 & & \\
 - 12 & - 12 & \\
 \hline
 y + z = 25 & & \\
 \text{und } z = 15 - y & &
 \end{array}$$

III.

$$15 - y = \frac{54}{y}$$

× y

$$15y - y^2 = 54$$

Oder

$$y^2 - 15y = -54$$

Ergänzt

$$y^2 - 15y + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

✓

$$y - \frac{15}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{18}{2} = 9 \text{ Zoll, die Breite,}$$

und $z = 15 - 9 = 6$ Zoll die Höhe
des befraglichen Kästchens.

P r o b e:

1) Multipliziert man die 3 Faktoren 12, 9 und 6 durch einander, so erscheint der kubische Inhalt 648 Kubikzolle.

2) Nimmt man zur Erhaltung der Oberfläche immer 2 und 2 Zahlen zum Multipliciren z. B. $12 \times 9 = 108$, $12 \times 6 = 72$ und $9 \times 6 = 54$, so findet man nach geometrischen Gründen die Hälfte der Umflächung $108 + 72 + 54 = 234$. Diefs duplirt giebt 468 Quadratzeile.

3) Das Doppelte der 3 gefundenen Dimensionen $2 (12 + 9 + 6) = 2 \times 27 = 54$ liefert endlich die im Problem stehende 54 Zoll lange Schnur, welche zur Umkreuzung des Kästchens nothwendig war.

§. 70.

Ein anderes hieher gehöriges Problem.

Ein Rechenmeister hinterließ 2 Töchter, deren eine sich zum Heurathen noch zu jung,

die andere zu alt glaubte, und demungeachtet keine wufste wie alt sie wäre. Jedoch fanden sie unter den Papieren ihres seligen Vaters folgenden kleinen Aufsatz: „Wenn Mathilde die Zahl ihrer Jahre quadriert, und zu den Produkte ihr Alter nebst noch 100 Jahren addirt, so kömmt die Jahrzahl ihrer Geburt heraus. Kubirt hingegen Elise ihr Alter, zieht dessen Quadrat davon ab, und addirt zur Differenz 380, so erhält sie gerade das Doppelte der Jahrzahl ihrer Geburt.“

„Wenn ferner Elise von der Jahrzahl ihrer Geburt die der Mathilde abzieht, und die Differenz noch um 10 vermindert, so erhält sie ihr Alter wirklich.“ Wie alt war jede?

Auflös. Es sey die ältere Tochter x Jahre und die jüngere y Jahr alt, die Jahrzahl der Geburt der ältern betrage z , folglich, wenn die Differenz der beyden Alter dazu addirt wird, erscheint die Jahrzahl der Geburt der jüngern $z + x - y$. Daraus lassen sich folgende 3 Gleichungen ableiten, die die Bedingungen des Problems ausdrücken.

$$\text{I. } x^2 + x + 100 = z$$

$$\text{II. } y^3 - y^2 + 380 = 2z + 2x - 2y$$

$$\text{III. } x - y - 10 = y.$$

Da nun in der ersten Gleichung der Werth des z in lauter x gegeben ist, und da sich in der drit-

ten Gleichung der Werth von y auch in x geben läßt; denn es ist $y = \frac{x - 10}{2}$: so können in der

zweyten Gleichung statt y und z Aequivalente substituirt werden, und man hat nur mehr x zu bestimmen. Zuvor aber stelle man noch das Quadrat und den Kubus der Gleichung $y = \frac{x - 10}{2}$ her.

$$\text{Es ist } y^2 = \frac{x^2 - 20x + 100}{4}$$

$$\text{und } y^3 = \frac{x^3 - 30x^2 + 300x - 1000}{8}$$

Nun folgt die Substitution in der zweyten Gleichung:

$$y^3 - y^2 + 380 = 2z + 2x - 2y.$$

Es entsteht:

$$\frac{x^3 - 30x^2 + 500x - 1000}{8} - \frac{x^2 + 20x - 100}{4}$$

$$+ 380$$

$$= 2x^2 + 2x + 200 + 2x - x + 10.$$

$$= 2x^2 + 3x + 210.$$

Die ganze Gleichung durch 8 multipliziert giebt

$$x^3 - 30x^2 + 300x - 1000 - 2x^2 + 40x - 200 + 3040$$

$$= 16x^2 + 24x + 1680.$$

$$\begin{array}{r} \text{Abgek. } x^3 - 32x^2 + 340x + 1840 = 16x^2 + \\ 24x + 1680 \\ - 16x^2 - 24x - 1680 = 16x^2 - \\ 24x - 1680 \end{array}$$

$$x^3 - 48x^2 + 316x + 160 = 0.$$

Hier wäre nun wieder die Regel von §. 41. einschlägig. Aber ich versuche einen andern Weg. Da die Zahl 160 gegen die übrigen Glieder ziemlich unbedeutend ist, so lasse ich sie einen Augenblick ganz weg. Folglich

$$\begin{array}{rcl}
 & x^3 - 48x^2 + 316x = 0 \\
 \text{Oder} & x^3 - 48x^2 + & - 316x \\
 : x & x^2 - 48x = & - 316 \\
 \text{Ergänzt} & + 576 & + 576 \\
 & \hline
 & x^2 - 48x + 576 = 260 \\
 \checkmark & x - 24 = 16 \text{ ungefähr} \\
 & x = 40.
 \end{array}$$

Weil nun 40 wirklich ein Faktor aus dem Zahlen-
gliede 160 ist, so versuche man die Zusammensetzung
der Aequation damit.

$$\begin{array}{rcl}
 & x^3 = & 64000 \\
 & + 316x = + & 12640 \\
 & + 160 & + 160 \\
 \hline
 & x^3 + 316x + 160 = & 76800 \\
 & - 48x^2 & - = 76800 \\
 \hline
 & x^3 - 48x^2 + 316x + 160 = 0. & \text{Vollkom-} \\
 & \text{mene Richtigkeit! *)}
 \end{array}$$

*) Ganz auf die nämliche Art kann auch jene kubische Gleichung: $x^3 - 600,52x^2 + 312,01x - 6 = 0$, welche mir vom Hrn. geistlichen Rath und Professor Magold im 6ten Stück des Lentnerischen Litteratur- und Kunstanzeigers 1809 öffentlich aufgegeben wurde, um meine Kunst, sie auf eine leichte Art aufzulösen, daran zu versuchen, abgefertigt werden.

Mathilde war daher in der That schon 40 Jahr alt. Man forsche nun auch nach dem Alter der Elise!

Da das Zahlenglied 6 auch hier sehr klein gegen die zwey vorausgehenden Koeffizienten ausfällt, so kann es ganz wegbleiben, und man kömmt durch Anwendung des sogenannten Hypobibasmus der ersten Wurzel doch nahe genug auf die Spur. Daher

$$\begin{array}{rcl}
 & x^3 - 600,52x^2 & = - 312,01x \\
 : x & x^2 - 600,52x & = - 322,01 \\
 \text{Ergänzt} & + (300,26)^2 & = + 99155,0676 \\
 & \hline
 & x^2 - 600,52x + (300,26)^2 & = 89844,0576 \\
 \checkmark & x - 300,26 & = 299,74 \\
 & + 300,26 + 300,26 & \\
 & \hline
 & x & = 600.
 \end{array}$$

Weil sich nun 600 als rationaler Faktor von 5 sehr gut denken läßt, so ist nichts gewissers, als dafs 600 eine Wurzel der vorgelegten Gleichung sey. Man dividire nun durch $x - 6 = 0$ in dieselbe, um theils volle Gewifsheit, theils die beyden übrigen Wurzeln ebenfalls zu erhalten.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 600,52x^2 + 312,01x - 6 & | & x^2 - 0,52x + 0,01 \\
 (x - 600) & & \\
 \underline{x^3 - 600x^2} & & \\
 + & & \\
 - 0,52x^2 & & \\
 (x - 600) & & \\
 \underline{- 0,52x^2 + 312x} & & \\
 + & & \\
 0,01x & & \\
 (x - 600) & & \\
 \underline{0,01x - 6} & & \\
 + & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

Diese Antwort ertheilt die dritte Gleichung, wenn man anstatt x die Zahl 40 substituirt. Es entsteht

$$40 - y - 10 = y$$

d. i. $30 = 2y$

: 2 $15 = y$. So viele Jahre zählte die Mathilde. Die Probe darüber ist leicht zu machen.

§. 71.

Versuch, die berühmte Coburgische Aufgabe durch meine Methode zu lösen.

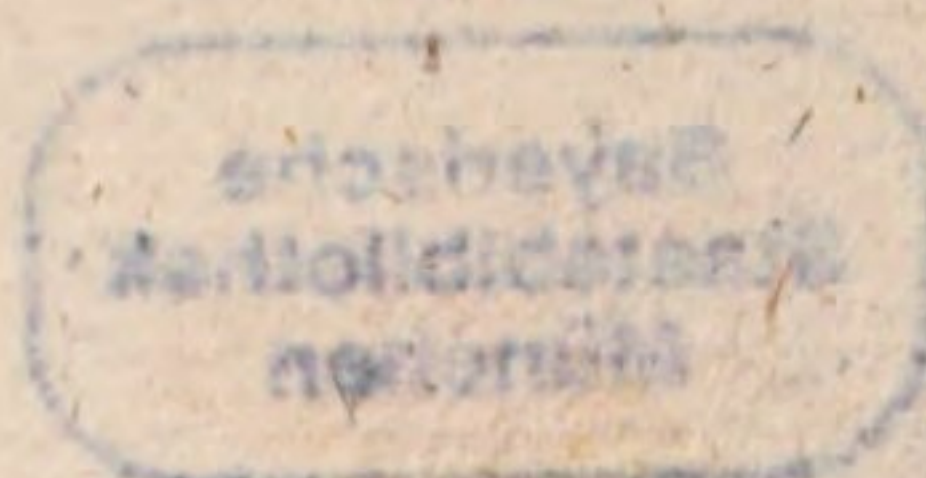
Ein alter Rechenmeister *Simon Coburg* mit Namen, warf bekanntlich folgendes Problem auf: „Item, drey legen sämmtlich 240 fl. „handeln jeder eine Zeit, also dafs sie mit „Hauptgut und Gewinn zusammen bringen „483 fl. steht der erste 10 Monat, und nimmt „für Hauptgut und Gewinn 175 fl. B steht 7 „Monat, und nimmt 164 fl. C steht 4 Monat „und nimmt 144 fl. Nun ist die Frage, wie

Gewifsheit ist da; nun auch die beyden andern Wurzeln bestimmt!

$$\begin{array}{rcl}
 & x^2 - 0,52x & = - 0,01 \\
 \text{Ergänzt} & + (0,26)^2 & = + 0,0676 \\
 \hline
 & x^2 - 0,52x + (0,26)^2 & = 0,0576 \\
 \sqrt{} & x - 0,26 & = \pm 0,24 \\
 & + 0,26 & + 0,26 \\
 \hline
 & x & = 0,5.
 \end{array}$$

und $x = 0,02$.

Die 3 Wurzeln der vorgelegten kubischen Gleichung sind demnach 600, 0,5 und 0,02.



„viel jeder insonderheit eingelegt habe?“ Dieses Problem war seither immer ein Stein des Anstosses. Mancher Mathematiker versuchte seine Kräfte umsonst an dessen Auflösung. Man sehe nur meine Algebra S. 384. Erst vor wenig Jahren noch schrieb ein Professor der Mathematik aus Neuburg an der Donau an mich nach Amberg, daß er zwar die Coburgische Aufgabe in eine Gleichung zu bringen, aber sie nicht aufzulösen gewußt habe *).

*) Hier ist die getreue Abschrift dieses mir werthen Briefes.

*

*

*

Es ist bereits mehr als ein Jahr, daß ich einen Versuch wagte, die Simon-Coburgische Aufgabe, die Sie algebraisch aufgelöst haben, arithmetisch aufzulösen. Nach einigen vergeblichen Bemühungen brachte ich endlich das ganze Problem auf folgende Gleichung;

$$\frac{175}{x + 10} + \frac{164}{x + 7} + \frac{144}{x + 4} = \frac{240}{x}$$

Ein Mathematiker, dem ich diese Aequation zeigte, sagte mir bloß vom Ansehen, es sey schwer oder vielleicht gar unmöglich selbe so aufzulösen, daß daraus eine brauchbare Formel entstünde. So blieb diese Gleichung bey mir unversucht liegen, ohne gewiß zu seyn, ob sich selbe auflösen lasse oder nicht.

Erst vor Kurzem kam mir diese Gleichung wieder in die Hände, und zugleich der Gedanke in den Sinn: Wie wäre es, wenn du selbe Titl. Herrn Prof. Prändel schicktest? vielleicht löset Er sie auf, oder kann dir doch sagen, ob sie sich lösen lasse oder nicht. Bitte also, mir es nicht ungütig zu nehmen, daß ich meinem Gedanken folgte.

Ich will es nun wagen, dieses Problem nach meiner Methode aufzulösen. Die hiezu gegebene Gleichung ist diese:

$$\frac{175}{x + 10} = \frac{164}{x + 7} + \frac{144}{x + 4} = \frac{240}{x}.$$

Man drücke die Gleichung kürzer und allgemeiner aus

$$\frac{a}{x + 10} + \frac{b}{x + 7} + \frac{c}{x + 4} = \frac{d}{x}$$

$$\times x \quad \frac{ax}{x + 10} + \frac{bx}{x + 7} + \frac{cx}{x + 4} = d$$

Das x muß in gegenwärtiger Gleichung $6\frac{2}{3}$ seyn. Wie aber dieses x aus den bekannten Zahlen ervirt werde, müßte die Auflösung der Gleichung zeigen. Könnte die Auflösung so gemacht werden, daß es eine allgemeine Formel gäbe, so wäre man in den Stand gesetzt, nicht nur die Coburgische, sondern jede andere ihr ähnliche Aufgabe arithmetisch aufzulösen.

Wenn Sie die vorgemerkte Aequation glücklich lösen, muß und will ich Ihnen gerne die Ehre überlassen, das Simon-Coburgische Problem auch arithmetisch aufgelöst zu haben, und die Auflösung allenfalls in öffentliche Blätter einrücken zu lassen. Meines Theils bin ich zufrieden, von Ihnen einen Brief zu erhalten, worinn entweder die Auflösung der Gleichung, oder der Ausspruch steht, daß sie sich entweder gar nicht, oder nicht so lösen lasse, daß daraus eine anwendbare Formel entstünde. Verharre mit geziemender Verehrung;

Ihr etc.

Neuburg an der Donau,
den 1. May 1803.

bereitwilligster Collega
Ildephons Hacklinger,
Can. reg. Weyar.
d. Z. Professor allda.

$$\times (x + 10) \quad \frac{ax + bx^2 + 10bx + cx^2 + 10cx}{x + 7} = dx + 10d$$

$$\times (x + 7) \quad \frac{ax^2 + 7ax + bx^2 + 10bx + cx^3 + 10cx^2 + 7cx^2 + 70cx}{x + 4} =$$

$$dx^2 + 10dx + 7dx + 70d.$$

$$\times (x + 4) \quad \begin{aligned} & ax^3 + 7ax^2 + bx^2 + 10bx^2 + \\ & 4ax^2 + 28ax + 4bx^2 + 40bx + \\ & cx^3 + 10cx^2 + 7cx^2 + 70cx \\ & = dx^3 + 10dx^2 + 7dx^2 + 70dx \\ & + 4dx^2 + 40dx + 28dx + 280d. \end{aligned}$$

Geordnet nach den Würden von x:

$$\left. \begin{array}{l} + a \\ + b \\ + c \\ - d \end{array} \right\} x^3 \quad \left. \begin{array}{l} + 11a \\ + 14b \\ + 17c \\ - 21d \end{array} \right\} x^2 \quad \left. \begin{array}{l} + 28a \\ + 40b \\ + 70c \\ - 138d \end{array} \right\} x - 280d = 0.$$

In Zahlen:

$$\begin{aligned} & 243x^3 + 1629x^2 - 11580x - 67200 = 0 \\ : 3 & \quad 81x^3 + 543x^2 - 3860x - 22400 = 0 \\ : 81 & \quad x^3 + \frac{543}{81}x^2 - \frac{3860}{81}x - \frac{22400}{81} = 0 \end{aligned}$$

Man schaffe die Brüche nach §. 22. aus der Gleichung fort.

$$x^3 + \frac{181}{27}x^2 - \frac{3860}{81}x - \frac{22400}{81} = 0$$

$$\frac{27^0.}{y^3} + \frac{27^1.}{181y^2} - \frac{27^2.}{3860y} - \frac{27^3.}{5443200} = 0,$$

$$y^3 + 181y^2 - 34740y - 5443200 = 0,$$

wo $y = 27x$ gilt.

Man werfe das Zahlenglied auf die rechte Seite hinüber!

$$y^3 + 181y^2 - 34740y = 5443200$$

Zieht man die Kubikwurzel beyderseits aus, so ergiebt es sich, dafs links $45540y$ nebst 216000 mangeln, und dafs um y^2 zu viel da ist. Die beyläufige Wurzelgleichung heifst daher

$$\begin{array}{r} y + 60 = 176 \\ - 60 - 60 \\ \hline y = 116. \end{array}$$

Da nun y noch viel zu klein ist, so lasse man es wenigst 120 gelten, und ergänze die Gleichung damit, das heifst, man addire beyderseits $45540y$ und 216000 , und ziehe y^2 überall ab.

$$\begin{array}{r} y^3 + 181y^2 - 34740y = 5443200 \\ - y^2 \qquad \qquad \qquad - 14400 \\ \hline y^3 + 180y^2 - 34740y = 5428800 \\ \qquad \qquad \qquad + 45540y \qquad \qquad \qquad = + 5464800 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 216000 = + 216000 \\ \hline y^3 + 180y^2 + 10800y + 216000 = 11196000 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\begin{array}{r} y + 60 = 224 \text{ ungefähr.} \\ - 60 - 60 \\ \hline y = 164. \end{array}}$$

Augenscheinlich ist y noch zu klein. Man lasse daher $y = 170$ gelten, und ergänze noch einmal.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 + 181y^2 - 34740y & = & 5443200 \\
 \quad \quad y^2 & = & -28900 \\
 \hline
 y^3 + 180y^2 - 34740y & = & 5414300 \\
 \quad \quad + 45540y & = & +7741800 \\
 \quad \quad + 216000 & = & +216000 \\
 \hline
 y^3 + 180y^2 + 10800y + 216000 & = & 13372100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \sqrt[3]{y + 60} & = & 232 \\
 \quad \quad - 60 & - & 60 \\
 \hline
 y & = & 172.
 \end{array}$$

Weil nun 180 ein Faktor aus dem Zahlengliede 5443200 ist, so dünkt mich nichts natürlicher, als daß 180 eine Wurzel dieser Gleichung sey. Ich will die Ergänzung zum drittenmal versuchen, so daß $y = 180$ genommen wird.

$$\begin{array}{rcl}
 y^3 + 181y^2 - 34740y & = & 5443200 \\
 \quad \quad - y^2 & = & -32400 \\
 \hline
 y^3 + 180y^2 - 34740y & = & 5410800 \\
 \quad \quad + 45540y & = & +8197200 \\
 \quad \quad \quad + 216000 & + & 216000 \\
 \hline
 y^3 + 180y^2 - 10800y + 216000 & = & 13824000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \sqrt[3]{y + 60} & = & 240 \text{ in aller Wahrheit.} \\
 \quad \quad - 60 & - & 60 \\
 \hline
 y & = & 180
 \end{array}$$

Aber

$$y = 27x$$

Also

$$27x = 180$$

: 27

$$x = 6\frac{2}{3}.$$

Da nun die Brüche der Grundgleichung

$$\frac{175}{x + 10} + \frac{164}{x + 7} + \frac{144}{y + 4}$$

den Gewinn eines Monats für jeden Theilnehmer bezeichnen, so ist es nun leicht, diesen Gewinn wirklich zu bestimmen. Es ist derselbe für den ersten

$$\text{Theilnehmer } \frac{175}{6\frac{2}{3} + 10} = 175 : 16\frac{2}{3} = 175 : \frac{50}{3} \\ = 175 \times \frac{3}{50} = 10\frac{1}{2} \text{ fl.}$$

Auf gleiche Weise findet man ihn für den zweyten und dritten Theilnehmer, nämlich 12 und $13\frac{1}{2}$ fl. Diese zusammen addirt geben so wie die Substitution in $\frac{240}{x}$ die Summe 36 fl.

Endlich spreche man nach der Regel de tri: 36 fl. monatlicher Gewinn legen 240 fl., was legt $10\frac{1}{2}$ fl.? Antw. 70 fl. Beym Zweyten kommen 80, und bey dem Dritten 90 fl.

Diese neue Auflösung liefert also die nämlichen Resultate, wie ich sie in meiner Algebra S. 384—392 gefunden, obgleich die Methoden gar sehr von einander unterschieden sind. Man hat demnach eine allgemeine Verfahrungsart, wie Beyspiele dieser Art zu berechnen sind.

§. 72.

Ein Beyspiel, welches in meiner Algebra sehr mühsam durch die Kardaniregel aufgelöset worden.

Unter einigen edelmüthigen Freunden that sich nach und nach eine wohlthätige Gesell-

schaft hervor. Jeder aus ihnen verband sich, täglich so viele Kreuzer für die Armen in eine Spaarbüchse nieder zu legen, als viele Glieder sich dazu unterschreiben würden, und eben so viele Tage auch die gute Sache fortzusetzen. Die Liste war nun fertig, und das Bündniss förmlich geschlossen. Allein, als es auf die Thätigkeit ankam, waren 3 Glieder davon unsichtbar geworden. Die übrigen setzten aber ihre Beyträge standhaft fort, ohne um 3 Kreuzer weniger zu zahlen, oder 3 Tage früher aufzuhören, und schickten am Ende 597 fl. 16 kr. an das Armeninstitut ab. Wie viel waren es Glieder? Was gab jeder täglich? und wie lange dauerten die Beyträge?

Auflös. Die Anzahl der Glieder, die sich anfänglich unterschrieben hatten, waren x , die Kreuzer, welche täglich jeder einlegte, auch x und die Tage der Dauer gleichfalls x . Allein die Anzahl der wirklich beytragenden Glieder $= x - 3$. Ich stelle demnach den Reesischen Ansatz auf:

$$\begin{array}{l|l} \text{Kr. ?} & x - 3 \text{ Glieder} \\ & x \text{ Tagen} \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} \text{Gl. } 1 \\ \text{T. } 1 \end{array} \right. & x \text{ Kr.} \end{array}$$

Antw. $x^3 - 3x^2$ Kreuzer.

Weil nun diefs die 597 fl. 16 kr. $= 35836$ kr. vorstellt, so hat man ohne weiters die Gleichung.

$$x^3 - 3x^2 = 35836$$

$$\sqrt[3]{x - 1} = 33 \text{ beynahe.}$$

$$\text{und } x = 34.$$

Man erfährt aber beym Wurzelauszuge linker Hand, dafs $3x$ mangeln, und dafs eine Einheit zu viel da ist. Da nun das Zahlenglied durch 34 aufgeht, so darf man hundert gegen eins wetten, 34 ist eine wahre Wurzel. Diefs wird sogleich die Ergänzung lehren.

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \qquad \qquad \qquad = 35836 \\ \quad \quad \quad + 3x \qquad \qquad \quad + 102 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 3x \qquad \qquad = 35938 \\ \quad \quad \quad - 1 \qquad \qquad \quad - 1 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 35937 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{x - 1} = 33 \text{ genau.}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad + 1 \quad + 1 \\ \hline x = 34. \end{array}$$

Es waren demnach anfänglich 34 Mitglieder, wovon 31 jeder 34 kr. 34 Tage lang einlegten.

§. 73.

Zum Schlusse noch ein kubisches Problem.

In einem Kirchthurme hängen 3 Glocken, die in der Taufe die Namen Agatha, Benno und Cäcilia erhielten. Sie wägen zusammen $146 \frac{7}{10}$ Zentner, und wenn man ihre Gewichte durcheinander multipliziret, entsteht das Produkt 66264 Zentner. Multipliziret man aber A mit B, dann A mit C, wie auch B mit C, und addirt

die drey Produkte, so erhält man $6164\frac{3}{10}$ Zentr.
Wie schwer ist jede der 3 Glocken inson-
derheit?

Auflös. Es halte die Glocke A x Zentner, die
Glocke B y, und die Glocke C z. Daher die
Gleichungen:

I.

$$x + y + z = \frac{1467}{10}$$

II.

$$xyz = 66264$$

$$\text{und } x + y = \frac{1467}{10} - z$$

$$zy = \frac{66264}{z}$$

III.

$$xy + xz + yz = \frac{61643}{10}$$

$$\text{Oder } xy + z(x + y) = \frac{61643}{10}$$

$$xy = \frac{61643}{10} - z(x + y)$$

$$\text{Substit. } xy = \frac{61643}{10} - z\left(\frac{1467}{10} - z\right)$$

$$\text{oder } xy = \frac{61643}{10} - \frac{1467z}{10} + z^2$$

$$\text{Allein es ist auch } xy = \frac{66264}{z}$$

$$\frac{61643}{10} - \frac{1467z}{10} + z^2 = \frac{66264}{z}$$

Gleiche Nenner hergestellt.

$$61643z - 1467z^2 + 10z^3 = 662640$$

$$\text{Geord. } 10z^3 - 1467z^2 + 61643z - 662640 = 0$$

$$: 10 \quad z^3 - \frac{1467z^2}{10} + \frac{61643z}{10} - 66264 = 0$$

Die Brüche hinweggeschafft!

$$z^3 - \frac{1467z^2}{10} + \frac{61643z}{10} - 66264 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 10^0. & 10^1. & 10^2. & 10^3. \\ \hline v^3 - 1467v^2 + 61643v - 66264000 = 0, \end{array}$$

wo $v = 10z$ im Werthe hält.

Man setze wieder

$$v^3 - 1467v^2 + 61643v = 66264000.$$

Man ziehe beyderseits die Wurzel aus, und zwar erstens linker Hand.

$$\begin{array}{r} v^3 - 1467v^2 + 61643v \quad | \quad v - 489 \\ \hline -v^3 \\ \hline -1467v^2 + 61643v \\ \quad (3v^2) \\ \hline -1467v^2 + 717363v \\ \quad + \\ \hline \quad \quad \quad -116826169 \\ \quad \quad \quad + \\ \hline \quad \quad -100933v + 116826169 \end{array}$$

Dann auch rechter Hand.

66|264|000 | 801 mit Dezimalen.

$$\begin{array}{r} 64| \\ \hline 2\ 264\ 000 \\ 1\ 920\ 0 \end{array}$$

Es heisst daher die unvollkommene Wurzelgleichung

$$v - 489 = 401$$

$$+ 489 + 489$$

$$v = 890, \text{ wobey sich zugleich}$$

offenbart, daß linker Hand noch $100933v$ mangeln, und daß die Zahl 116826169 abgezogen zu werden begehrt. Da aber für $v = 890$ die Gröfse $100933v = 89830370$ ist, folglich beyderseits ungleich mehr abgezogen als addirt werden muß, so geht daraus der richtige Schluß hervor, daß 890 als Wurzel noch viel zu groß ist. Nehmen wir, um uns die Rechnung zu erleichtern, $v = 860$ an, dann wird die Ergänzung folgendermaßen ausfallen:

$$\begin{array}{r}
 v^3 - 1467v^3 + 616430v = 66264000 \\
 \quad \quad \quad + 100933v \quad \quad \quad + 86802380 \\
 \hline
 v^3 - 1467v^2 + 717363v = 153066380 \\
 \quad \quad \quad - 116826169 - 116826169 \\
 \hline
 v^3 - 1467v^2 + 717363v - 116826169 = 36240211
 \end{array}$$

 $\sqrt[3]{}$

$$v - 489 = 331 \text{ nicht gar.}$$

$$\quad \quad \quad + 489 \quad \quad 489$$

$$v = 820. \text{ Folglich ist } 820 \text{ noch}$$

etwas zu groß. Nun bietet sich 800 als Faktor des Zahlengliedes 66264000 dar; daher scheint der Versuch mit 800 einer der glücklichsten zu seyn.

$$\begin{array}{r}
 v^3 = 512000000 \\
 \quad \quad \quad + 616430v = + 493144000 \\
 \hline
 v^3 + 616430v = 1005144000 \\
 \quad \quad \quad - 1467v^2 = - 93888000 \\
 \hline
 v^3 - 1467v^2 + 616430v = 66264000
 \end{array}$$

Es ist also wirklich $v = 800$

Allein $v = 10z$:

$$\text{Daher } 10z = 800$$

$$: 10 \quad \quad z = 80.$$

Nun bestimme man auch die übrigen beyden Gröſſen x und y .

Dazu bediene man sich der ersten beyden Gleichungen, wo statt z sein Werth gesetzt werden kann.

I.

$$x + y = \frac{1467}{10} - 800 = \frac{667}{10}$$

folglich

$$y = \frac{667}{10} - 10x$$

II.

(8

$$xy = \frac{66264}{80} = \frac{8283}{10}$$

$$: x \quad y = \frac{8283}{10x}$$

Zusammenstellung der beyden Werthe von y .

$$\frac{667}{10} - 10x = \frac{8283}{10x}$$

$$667x - 10x^2 = 8283$$

$$\text{Oder } 10x^2 - 667x = -8283$$

$$: 10 \quad x^2 - \frac{667x}{10} = -\frac{8283}{10}$$

$$\text{Ergänzt } x^2 - \frac{667x}{10} + \left(\frac{667}{20}\right)^2 = 113569$$

$$\sqrt{\quad} \quad x - \frac{667}{20} = \pm \frac{337}{20}$$

Endlich $x = 50\frac{1}{5}$ und $16\frac{1}{2}$ Zentner.

Die 3 Glocken wägen demnach insonderheit $16\frac{1}{2}$, $50\frac{1}{3}$ und 80 Zentner. Die Probe hievon ist leicht zu machen.

§. 74.

Einige vermischte kubische Probleme zur Selbstübung.

I,

„Rechnen Sie mir ein Paar gute Nummer „aus,“ sagte ein Lottospieler zu einem Mathematiker, den er für einen Gabulisten hielt. Dieser wollte anfänglich nicht daran; als aber der Ungestüme auf seiner Forderung bestand, ergriff er die Feder und schrieb Folgendes nieder: „Theile 32 in solche zwey Theile, dass die Differenz ihrer Würfel 6272 beträgt, so gewinnst „du sicher!“ Wie müssen diese 2 Numern gefunden werden?

II.

Es sollen vor einem Zeughause 7770 Kanonkugeln in eine dreyeckichte Pyramide aufgeschichtet werden; wie viel soll man auf eine Seite des untersten Dreyecks legen? Die Theorie der figurirten Zahlen bietet zum Behuf dieser Rechnung die geschmeidige Formel dar:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = f, \text{ wo } n \text{ die Anzahl der}$$

Kugeln auf einer Seite, und f die Summe der Kugeln bedeutet, woraus die Pyramide bestehen soll.

III.

Drey hoffnungsvolle Jünglinge, die sich auf Mathematik verlegten, wünschten das Alter ihres Vaters zu wissen. Dieser ertheilte ihnen folgenden Aufschluss darüber: „Wenn ich die 3 Differenzen, die beym Abzug eines jeden eurer Alter von meinem herauskommen, mit einander multiplizire, so erhalte ich zum Produkt 47619.“ Wie alt war wohl der Vater, da die Söhne 8, 10 und 14 Jahre zählten?

IV.

Ein kubisch gebautes Gefäß ist um 3 Schuh kürzer als hoch, und um 5 Schuh schmaler als lang; faßt aber demungeachtet 924 Kubikfuß. Wie lang, hoch und breit ist dieses Gefäß? Man erhält aber bekanntlich den Kubikinhalte eines solchen Körpers, wenn man die 3 Dimensionen, Länge, Höhe und Breite in einander multipliziert.

V.

Jemand kaufte rothes, blaues und grünes Tuch, in allem 31 Ellen für 303 fl. Die Elle rothes kostet so viel Gulden als es Ellen blaues sind, die Elle blaues so viel als es Ellen grünes sind, und die Elle vom grünen Tuche so viel als es Ellen rothes sind. Multipliziert man die 3 Tuchparthien in einander, so kommen 945 Ellen zum Vorschein. Wie viel Ellen wurden von jeder Sorte gekauft?

§. 75.

In einer unreinen, unergänzbaren, kubischen Gleichung, wo die Wurzeln zugleich irrational sind, dieselben durch Annäherung (per approximationem) zu bestimmen.

Um eine Vergleichung zwischen meiner neuen und ältern Methode anstellen zu können, will ich zuerst jene Regeln, die ich diesfalls in meiner Algebra gegeben habe, ins Kurze zusammen fassen, und das nächste beste Beyspiel darnach bearbeiten. Nach der Hand werde ich eine kleine Kritik darüber anstellen, und neue Maafsregeln nach meinem jetzigen Systeme auf das Tapet bringen.

Auflösung nach meiner ältern Methode.

- a) Es werde die Gleichung zuvörderst gut geordnet, dann das zweyte Glied, falls es ein Quadrat der unbekannten Gröfse enthält, hinausgeschafft.
- b) Man bestimme die Schranken der Wurzel.
- c) Man zerfalle das letzte Glied in solche Faktoren, die sich innerhalb der Schranken befinden. Ist gähling dieses letzte Glied eine Primzahl, so mag sie in Gedanken um etliche Einheiten vermehrt oder vermindert werden, um sie leichter zerfallen zu können.
- d) Man versuche die Faktoren innerhalb den Schranken so lange, bis man zwey derselben gefunden, die um 1 unterschieden sind.

- e) Die kleinere dieser zwey Wurzeln werde um eine unbekannte Gröfse z. B. um v vermehrt, oder die gröfsere vermindert, und eine neue Gleichung daraus gebildet.
- f) Da v einen Bruch bedeutet, so kann die Kubuswürde weggelassen werden; denn je höher die Würde eines Bruches, desto geringer der Werth desselben.
- g) Nachdem die neue Gleichung ausgeführt, und ein Werth für v gefunden worden, vermehre man die angenäherte Wurzel noch einmal um v , und verfare wie oben, so findet man obigen Bruch ungleich näher.
- h) Diefs Geschäft kann nun nach Gefallen fortgesetzt werden, so wird man seinem Zwecke immer näher kommen.

Um diese Regeln anwenden zu können, nehme man die Gleichung her:

$$10x - 20x^2 + 5x^3 = 2100$$

zur Bearbeitung vor die Hand.

$$\text{Gutgeord. } 5x^3 - 20x^2 + 10x - 2100 = 0$$

$$: 5 \quad x^3 - 4x^2 + 2x - 420.$$

Man schaffe das 2te Glied hinaus.

$$x = y + \frac{4}{3} \text{ und } x^2 = y^2 + \frac{8y}{3} + \frac{16}{9}$$

$$x^3 = y^3 + 4y^2 + \frac{16y}{3} + \frac{64}{27}$$

$$- 4x^2 = - 4y^2 - \frac{32y}{3} - \frac{64}{9}$$

$$+ 2x = + 2y + \frac{8}{3}$$

$$- 420 = - 420$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x - 420 = y^3 - \frac{10y}{3} - \frac{11394}{27} = 0$$

Es werden vor Allem die Brüche weggeschafft.

$$y^3 + 0y^2 - \frac{10}{3}y - 11394 = 0.$$

$$\frac{3^0.}{z^3} - \frac{3.}{30z} - \frac{9.}{11394} = 0, \text{ eine Gleichung}$$

worinn $z = 3y$ oder $y = \frac{z}{3}$ ist.

Man bestimme die Schranken. Da diese Gleichung unter die dritte Form gehört, wo die Schranken $z > \sqrt[3]{Q}$ und $z < \sqrt[3]{P + Q}$ sind, so gilt die Substitution:

$$z > \sqrt[3]{11394} = 22 \text{ und } z < 109$$

Da die erste Schranke der wahren Wurzel ungleich näher kömmt als die zweyte, so wollen wir die Zahl 23 in der Gleichung $z^3 - 30z = 11394$ prüfen. Also wenn $z = 23$, so ist:

$$\begin{array}{r} z^3 = 12167 \\ - 30z = - 690 \\ \hline z^3 - 30z = 11477 > 11394. \end{array}$$

Man sieht hieraus, daß 23 als Wurzel schon ein Bischen zu groß ist. Es werde daher

$x = 23 - m$ gesetzt, wo m einen kleinen Bruch bedeutet.

Der Kubus von m kann demnach als eine unbedeutende Größe weggelassen werden, wie folgt.

$$\begin{array}{rcl}
 z^3 & = & 12167 - 1587m + 69m^2 \\
 - 30z & = & -690 + 30m \\
 \hline
 & & 11477 - 1557m + 69m^2 = 11394 \\
 \text{Geord.} & & 69m^2 - 1557m + 11477 = 11394 \\
 & & \quad \quad \quad - 11477 - 11477 \\
 \hline
 & & 69m^2 - 1557m = \quad \quad \quad - 73 \\
 : 69 & & m^2 - 22,565 = \quad \quad \quad - 1,058 \\
 \text{Ergänzt} & & \quad \quad \quad + (11,282)^2 = + 127,283 \\
 \hline
 & & m^2 - 22,565 + (11,282)^2 = 126,225 \\
 \sqrt{} & & m - 11,282 = - 11,235 \\
 & & \quad \quad \quad + 11,282 \quad \quad + 11,282 \\
 \hline
 & & m = 0,047
 \end{array}$$

Wird nun dieser kleine Dezimalbruch abgezogen, so hat man die Wurzel sehr nahe gefunden.

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 0,047 \\
 \hline
 x = 22,952
 \end{array}$$

Wir wollen versuchen, ob diese Wurzel der Gleichung ein Genüge thut. Es muß also 22,952 kubirt werden, welches am besten durch Logarithmen geschieht, dann muß die nämliche Zahl mit 30 multiplicirt, und das Produkt vom Kubus abgezogen werden. Der Rest soll sich der Zahl 11394 nähern.

$$L \ 22,952 = 1.3608205$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4.0824615 = L \ 12080,9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22,952 \\ 30 \\ \hline 688,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 688,56 \\ \hline 11392,34 \\ 11394 \\ \hline 1,36 \end{array}$$

Die gefundene Wurzel hält also bis auf den unbedeutenden Unterschied 1,36 die Probe.

Daher $z = 22,952$

aber $z = 3y$

$$3y = 22,952$$

$\div 3$ $y = 7,651$

Endlich ist $y = x - 1,333$

$$x - 1,333 = 7,651$$

$$+ 1,333 = + 1,333$$

$$x = 8,984 \dots$$

Kritik über die gegebenen Regeln.

Das Hinausschaffen des 2ten Gliedes, wenn es in der Quadratform auftritt, bleibt allemal beschwerlich. Oft entstehen dadurch Brüche in der neuen Gleichung, die das Geschäft noch schwieriger machen.

Weit beschwerlicher ist in manchen Fällen die Bestimmung der Schranken, die zudem oft so weit auseinander fallen, daß sie dem Rechner kaum einigen Vortheil zu gewähren im Stande sind.

Aufstellung besserer Maasregeln aus der bisherigen Theorie.

1. Man lasse das zweyte Quadratglied ruhig in seinem Besitze, und wenn es gähling mangeln sollte, schaffe man es nach §. 44. hinein.
2. Man ordne die Gleichung so, dafs das Zahlen-
glied rechter Hand zu stehen kömmt.
3. Es werde beyderseits die Wurzel ausgezogen, und linker Hand fleissig bemerkt, was mangelt, und um was zuviel da ist.
4. Nach diesem Befund wird beyderseits addirt und subtrahirt.
5. Uebertrifft das zu Addirende das zu Subtrahirende stark, so kann die Wurzel sogleich etwas gröfser, oder im widrigen Falle etwas kleiner angenommen werden.
6. Man ziehe rechter Hand die Wurzel noch einmal aus, und berichtige die unbekannte Gröfse.
7. Es werde die Gleichung auf ein Neues nach dem so eben gefundenen Werth der unbekannten Gröfse ergänzt und rechter Hand die Wurzel ausgezogen.
8. Sobald die Wurzel um kein Ganzes mehr steigt, dann mögen die obigen Regeln e, f, g und h angewendet werden; oder man mag fortfahren, die Ergänzung der Aequation in mehrern Dezimalen auszuführen.

9. Ist die gegebene Gleichung so beschaffen, daß das Zahlenglied gegen die Koeffizienten gehalten sehr klein ausfällt, dann mag es anfänglich weggelassen, und die Gleichung um einen Grad herabgestimmt werden, wie es §. 70. geschehen.

Berechnung der obigen Aequation nach den eben aufgestellten Regeln.

$$\begin{array}{l} 10x - 20x^2 + 5x^3 = 2100 \\ \text{Gut geord.} \quad 5x^3 - 20x^2 + 10x = 2100 \\ : 5 \quad \quad \quad x^3 - 4x^2 + 2x = 420 \end{array}$$

Man ziehe beyderseits die Kubikwurzel aus.

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 2x \quad | \quad x - 1 \\ \hline - x^3 \\ \hline \quad - 4x^2 + 2x \\ \quad \quad \quad 3x^2 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad - 3x^2 + 3x - 1 \\ \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad - x^2 - x + 1 \end{array}$$

Zu einem vollkommenen Kubus mangelt also noch das Quadrat von x und x selbst, aber um 1 ist zu viel da. Unter diesen Umständen heist demnach die unvollständige Wurzelgleichung

$$\begin{array}{l} x - 1 = 7,4 \dots \\ \text{und} \quad x = 8,4 \dots \end{array}$$

Die Ergänzung wird dem zufolge so ausfallen:

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 - 4x^2 + 2x & = & 420 \\
 + x^2 & = & +70,56 \\
 + \frac{x}{1} & = & +8,4 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & = & 498
 \end{array}$$

$\sqrt[3]{}$

und

$$x - 1 = 7,93$$

$$x = 8,93 \dots$$

Bey nochmaliger Ergänzung bleibt zwar die linke Seite der Gleichung ungeändert; die Zahl rechter Hand aber verwandelt sich in diese: 507,675. . .

Zieht man aus ihr die Kubikwurzel, so erhält man sehr nahe 7,98, folglich $x \approx 8,98$.

Macht man mit dieser Wurzel die Probe, das heist, wenn man sie kubirt und quadirt, dann zum Kubus die doppelte Wurzel addirt, und von der Summe das vierfache Quadrat abzieht, wie es nämlich die ursprüngliche durch 5 abgekürzte Gleichung $x^3 - 4x^2 + 2x = 420$ lehret, so fehlt nicht mehr als 0,55. . . Die Wurzel ist also noch näher als oben gefunden worden.

§. 75.

Ein hieher gehöriges Problem zur Anwendung.

Jemand besitzt eine Kugel von Stein, die 16 Zoll im Durchmesser hält. Weil sie auf einer Seite stark beschädigt ist, möchte er gerne ein Segment herunter schneiden lassen, das genau 100 Kubikzoll in sich begreift. Wie dick

darf dieses Kugelsegment ausfallen, dass es der Forderung ein Genüge thut?

Auflös. Die Integralrechnung liefert uns dazu folgende leichte Formel:

$$\pi \left(\frac{dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = n, \text{ wo } \pi \text{ die Zahl}$$

3,14159 . . . , d den Durchmesser der Kugel, x die Dicke des Segments und n die Anzahl der Kubikzolle bedeutet, die das Segment in sich begreifen soli.

Man ordne nun vor allen die gegebne Gleichung

$$\pi \left(\frac{dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = n$$

$$: \pi \quad \frac{dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{n}{\pi}$$

$$\times 6 \quad 3dx^2 - 2x^3 = \frac{6n}{\pi}$$

$$\text{Oder} \quad 2x^3 - 3dx^2 = -\frac{6n}{\pi}$$

$$: 2 \quad x^3 - \frac{3dx^2}{2} = -\frac{3n}{\pi}$$

Itzt werde $d = 16$ Zoll, $n = 100$ Kubikzoll und für π auch sein Werth gesetzt.

$$x^3 - 24x^2 = -\frac{300}{3,14159 \dots}$$

Man bestimme den Werth der rechten Seite der Gleichung durch Division wirklich, und man erhält

$\sqrt[3]{}$

$$x^3 - 24x^2 = -95,493 \dots$$

$$x - 8 = -4,57$$

$$+ 8 \quad + 8$$

$$x = 3,43 \text{ ungefähr.}$$

Wollte man gähling die Zusammensetzung mit 3 versuchen, so erhält man für das Zahlenglied rechter Hand — 189. Hingegen giebt der Versuch mit 2 zur rechten Seite die Zahl — 88, das schon ungleich näher bey — 95 liegt als das obige — 189. Ein sicheres Zeichen, daß zu 2 noch ein kleiner Dezimalbruch gehört, um der Forderung ein Genüge zu leisten. Wir wollen diesen Bruch ausfindig machen, und ihn einstweilen = v heißen.

$$\text{Es ist } x^2 = (2 + v)^2 = 4 + 4v + v^2$$

$$\text{und } x^3 = (2 + v)^3 = 8 + 12v + 6v^2 + v^3$$

$$\text{Abgezogen } 24(2 + v)^2 = 96 + 96v + 24v^2$$

$$- 88 - 84v - 18v^2 =$$

$$- 95,493$$

$$\text{Oder } 18v^2 + 84v + 88 = 95,493$$

$$- 88 - 88$$

$$18v^2 + 84v = 7,493$$

$$: 6 \quad 3v^2 + 14v = 1,249$$

$$: 3 \quad v^2 + \frac{14}{3}v = \frac{1,249}{3}$$

3

$$\text{Ergänzt } + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = + \frac{49}{9}$$

$$v^2 + \frac{14v}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{52,744}{9}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{} \quad v + \frac{7}{3} = \frac{7,262}{3} \\
 \phantom{\sqrt{}} \quad - \frac{7}{3} \quad - \frac{7}{3} \\
 \hline
 \phantom{\sqrt{}} \quad v = \frac{0,262}{3} = 0,087 \dots
 \end{array}$$

Es wäre also die Dicke des Kugelsegments 2,087 . . . Zoll. Man untersuche auf der Stelle, ob für $x = 2,087$ die negative Zahl 95,493 herauskömmt, wenn vom Kubus der gefundenen Wurzel das 24igfache Quadrat abgezogen wird. Der Weg durch Logarithmen scheint mir wieder der dienlichste zu seyn.

$$\text{Log. } 2,087 = 0,3195224$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \hline
 0,9585672 = \text{Log. } 9,09
 \end{array}$$

$$\text{Log. } 2,087 = 0,3195224$$

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 0,6390448 \\
 \text{Log. } 24 \quad \frac{1,3802112}{2,0192560} = \text{Log. } 104,53
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2410 \\
 \hline
 150
 \end{array}$$

$$- 104,53$$

$$\hline 9,09$$

$- 95,44$. Also nur um 0,05 unterschieden, womit man zufrieden seyn kann.

§. 76.

Ein ähnliches Problem zur Selbstübung.

Drey Personen kaufen einen grossen Butterwecken, der die vollkommne Form einer ovalen

Kugel (Elliptoide) hat. In Ermanglung einer Wage wollen sie ihn durch Hilfe der Geometrie in 3 gleiche Theile zerschneiden. Der längere Durchmesser hält 14 und der kürzere 8 Zoll; folglich beträgt der kubische Inhalt sehr nahe an die 470 Kubikzolle. Wie weit trifft der Schnitt von jedem Scheitel einwärts, daß drey gleiche Theile ausfallen? Hierzu giebt die höhere Analyse die allgemeine Formel her:

$$\frac{d^2 \pi}{D^2} \left(\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = n,$$

welche sich für den vorgelegten Fall in die Speziele verwandelt:

$$\frac{8^2 \times 3,14159 \dots}{14^2} \left(\frac{14x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{470}{3}$$

Oder $\frac{16 \times 3,14159}{49} \left(7x^2 - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{470}{3}$

§. 77.

Von der sogenannten Kardaniregel.

Noch übrigst jener berühmte Kunstgriff, die unreinen kubischen Gleichungen aufzulösen, welchen die zwey Italienischen Mathematiker Scipio Ferro und Tartaglia jeder für sich erfunden, und den Kardanus, ihr Gesellschafter, in etwas verbessert, und in der Mitte des 16ten Jahrhunderts öffentlich bekannt gemacht hat.

Es wird dabey vorausgesetzt, daß das Quadratglied in der Gleichung entweder für sich selbst schon mangle, oder widrigenfalls hinausgeschafft worden sey.

Drey Urformen der unreinen kubischen Gleichung erschöpfen demnach alle nur mögliche Fälle, die hier vorkommen können. Ich setze sie in der obigen Ordnung §. 53. her:

$$1. \quad x^3 + Px - Q = 0.$$

$$2. \quad x^3 - Px + Q = 0.$$

$$3. \quad x^3 - Px - Q = 0,$$

Nehmen wir die erste Form vor die Hand, und zerlegen das x in Gedanken in zwey solche Theile y und z , dafs ihre Kubusse zusammen genommen dem Q , oder dem Zahlengliede gleich sind. Daher

I.

$$y + z = x$$

II.

$$y^3 + z^3 = Q$$

Man drücke die erste Urformgleichung $x^3 + Px - Q = 0$ durchgehends in y und z aus. Es ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ + Px & = & + Py + Pz \\ - Q & = & - y^3 - z^3 \\ \hline x^3 + Px - Q & = & 3y^2z + 3yz^2 + Py + Pz = 0. \end{array}$$

$$\text{Oder} \quad 3yz(y + z) = -P(y + z)$$

$$: (y + z) \quad 3yz = -P$$

$$: 3y \quad z = -\frac{P}{3y}$$

$$\text{Kubirt} \quad z^3 = -\frac{P^3}{27y^3}$$

Diesen Werth in der zweyten Hilfsgleichung $y^3 - z^3 = Q$ substituirt, giebt:

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} = Q.$$

$$\times y^3 \quad y^6 - \frac{p^3}{27} = Qy^3.$$

$$\text{Vers.} \quad y^6 - Qy^3 = \frac{p^3}{27}$$

$$\text{Ergänzt} \quad y^6 - Qy^3 + \frac{Q^2}{4} = \frac{Q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

$$\sqrt{\quad} \quad y^3 - \frac{Q}{2} = \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$\text{Vers.} \quad y^3 = \frac{1}{2}Q \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3}$$

$$\sqrt{\quad} \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

In der nämlichen zweyten Hilfsgleichung substituirt man mehrmals für y^3 , so ergiebt sich auch ein Werth für z

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}Q \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3} + z^3 = Q \\ - \frac{1}{2}Q \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2}Q \\ \hline \pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3} + z^3 = \frac{1}{2}Q \end{array}$$

$$\text{Vers.} \quad z^3 = \frac{1}{2}Q \pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3}$$

Endlich in der ersten Hilfsgleichung $y + z = x$ substituirt, so geht die verlangte Formel hervor:

$$\begin{aligned} x = & \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \\ & + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q - \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \end{aligned}$$

Ein ähnlicher Kalkul liefert für den zweyten Fall, wo nämlich $x^3 - Px + Q = 0$ ist folgende Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q + \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}Q - \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3}}$$

Und endlich für den dritten Fall, wo

$$x^3 - Px - Q = 0 \text{ ist,}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q - \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}Q + \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3}}$$

§. 78.

Kritische Blicke auf die 3 eroberten Formeln.

Die Formel für den ersten Fall ist durchgehends anwendbar; nur darf man sich von den vielen Irrationalgrößen, mit denen jede Auflösung einer individuellen Gleichung nothwendig zu thun bekömmt, nicht abschrecken lassen.

Ganz anders verhält sich die Sache mit den beyden übrigen Formeln. In ihnen kömmt unvermeidlich vor $\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3$. Kann sichs nicht fügen, daß $\frac{1}{4}Q^2 < \frac{1}{27}P^3$ ist? In solch einem, gar leicht möglichen Falle, wird natürlich die Gröfse $\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3$, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, negativ. Nun ist aber bekanntlich die Quadratwurzel aus einer negativen Gröfse unmöglich, also auch die ganze Auflösung auf diesen Wege unmöglich. Es verhalten sich demnach, im Durchschnitte genommen, die Anzahl der durch die Kardaniregel

aufzulösenden Gleichungen zur Anzahl der nicht aufzulösenden, wie 1 : 2. Das heisst, ich treffe immer 2 Gleichungen an, die ich nicht auflösen vermag, bis mir wieder eine aufstößt, die ich zu lösen im Stande bin.

§. 79.

Newton suchte diese Unvollkommenheit der Kardaniregel einigermaßen zu heben.

Dieser große Mathematiker, dem kein Hinderniss im Kalkuliren unübersteiglich schien, zog in der Formel des dritten Falls die Kubikwurzel mittels des Binomiallehrsatzes sowohl aus dem ersten als zweyten Theil wirklich aus, und brachte die beyden unendlichen Reihen in eine Summe. Um dieß bequemer auszuführen, setzte er $\frac{1}{2} Q = a$ und

$$\sqrt{\frac{1}{4} Q^2 - \frac{1}{27} P^3} = b \sqrt{-1}$$

Es war also für diesen Fall:

$$x = \sqrt[3]{a - b \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a + b \sqrt{-1}} = (a - b \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a + b \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Der erste Summand gab die Reihe:

$$a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b \sqrt{-1} + \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^2 + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^3 \sqrt{-1} - \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} b^4 \dots$$

Der zweyte hingegen:

$$a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b \sqrt{-1} + \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^2 - \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^3 \sqrt{-1} - \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} b^4 \dots$$

Addirt man diese beyden Reihen, so entsteht

$$x = 2a^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 \dots$$

oder $x = 2\sqrt[3]{a} \left[1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} \dots \right]$

Aber wie viele Glieder müßte man in solchen Fällen berechnen, wo P und Q groſſe Zahlen vorstellen, um nur eine leidentliche Genauigkeit dadurch zu erzielen?

§. 80.

Zur Versinnlichung alles dessen werde folgendes Problem nach der Kardaniregel gelöst.

Drey Brüder erben eine gewisse Summe zu gleichen Theilen. Wenn A 100 fl. von seiner Erbschaft, B 200 fl. von der seinen, und C 300 fl. davon hinweg thut, so bleiben ihnen doch noch so viel, daſs, wenn man die 3 Reste ineinander multiplizirt, das Produkt 8448000 entsteht. Wie groſs war eigentlich ein Erbtheil?

Auflös. Es heiſſe ein solcher Erbtheil $= x$, folglich sind die Reste

$x - 100$, $x - 200$, $x - 300$, und ihr Produkt ist nebst der Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 600x^2 + 110000x - 6000000 & = & 8448000 \\ & - & 8448000 - 8448000 \\ \hline x^3 - 600x^2 + 110000x - 14448000 & = & 0. \end{array}$$

Man schaffe das Quadratglied hinaus, das heisst, man setze $x = y + 200$.

Daher

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & y^3 + 600y^2 + 120000y + 8000000 \\
 - 600x^2 & = & - 600y^2 - 360000y - 24000000 \\
 \hline
 x^3 - 600x^2 & = & y^3 - 240000y - 16000000 \\
 + 110000x & = & + 110000y + 22000000 \\
 \hline
 x^3 - 600x^2 + 110000x & = & y^3 - 130000y + 6000000 \\
 & & - 8448000 \qquad \qquad \qquad - 8448000 \\
 \hline
 x^3 - 600x^2 + 110000x - 844800 & = & y^3 - \\
 & & 130000y - 2448000 = 0.
 \end{array}$$

Es heisst demnach die neue Gleichung, in welcher $x = y + 200$ ist,

$$y^3 - 130000y - 2448000 = 0.$$

Sie gehört unter die Rubrik der dritten Urform $x^3 - Px - Q = 0$, wo $P = 130000$ und $Q = 2448000$. Hier ist aber $\frac{1}{27}P^3$ um ein Namhaftes gröfser als $\frac{1}{4}Q^2$. Es war also die ganze Mühe bisher vergebens. Ich werde daher die ursprüngliche Gleichung wieder nach meiner Methode berechnen.

$$x^3 - 600x^2 + 110000x = 14448000.$$

Will man hieraus die Kubikwurzel ausziehen, so ergiebt sich linker Hand, dafs 10000x mangeln, und dafs hingegen um die Zahl 8000000 zuviel vorhanden ist. Die unvollkommne Wurzelgleichung heisst demnach

$$x - 200 = 243$$

$$\text{und } x = 443.$$

Da nun 10000x = 4430000 ist, so addire man diefs zu 14448000, kömmt 18878000. Davon 8000000

abgezogen, bleibt 10878000. Die neue Gleichung, welche die Wurzel um ein gutes näher bringt, heisst demnach so

$$x^3 - 600x^2 + 120000x - 8000000 = 10878000$$

$$\sqrt[3]{\quad} \quad x - 200 = 221$$

$$x = 421.$$

Weil nun 420 ein Faktor vom Zahlengliede 14448000 ist, so darf man 1000 gegen 1 wetten, dass dies die wahre Wurzel seyn wird. Folgende Ergänzung wird es zeigen.

$$\begin{array}{r} x^3 - 600x^2 + 170000x = 14448000 \\ \quad \quad \quad + 10000x + 4200000 \\ \hline x^3 - 600x^2 + 120000x = 18648000 \\ \quad \quad \quad - 8000000 = - 8000000 \\ \hline x^3 - 600x^2 + 120000x - 8000000 = 10648000 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\quad} \quad x - 200 = 220 \text{ vollkommen!}$$

$$\quad \quad + 200 = + 200$$

$$\hline x = 420.$$

§. 81.

Wendung des so eben gelösten Problems, um es vielleicht der Kardaniregel besser anzupassen.

Drey Geschwister, wovon sich das erste bereits 30, das zweyte 50, und das dritte 100 fl. erspart hatte, machten eine Erbschaft, die sie unter sich gleich vertheilten. Wenn sie nun ihre Barrschaften durcheinander multiplizirten, erhielten sie zum Produkte 6624000. Wie viel hat jeder geerbt?

Auflös. Die Faktoren sind, wenn x das ausdrückt, was jedes geerbt hat, $x + 30$, $x + 50$, und $x + 100$, folglich die Gleichung

$$\begin{array}{r} x^3 + 180x^2 + 9500x + 150000 = 6624000 \\ - 6624000 - 5960000 \\ \hline x^3 + 180x^2 + 9500x - 6474000 = 0. \end{array}$$

Nun muß das Quadratglied wieder daraus verbannt werden.

$$\begin{array}{r} x = y - 60 \\ x^2 = y^2 - 120y + 3600 \\ \hline x^3 = y^3 - 180y^2 + 10800y - 216000 \\ + 180x^2 = + 180y^2 - 21600y + 648000 \\ \hline x^3 + 180x^2 = y^3 - 10800y + 432000 \\ + 9500x = + 9500y - 570000 \\ \hline x^3 + 180x^2 + 9500x = y^3 - 1300y - 138000 \\ - 6474900 \qquad \qquad - 6474000 \\ \hline x^3 + 180x^2 + 9500x - 6474000 = y^3 - 1300y - 6612000 \\ = 0. \end{array}$$

Eine Gleichung, die unter der dritten Urform $x^3 - Px - Q = 0$ enthalten ist, und wo P 1300, Q hingegen 6612000 gilt. Weil nun hier $\frac{1}{27} P^3$ weit kleiner als $\frac{1}{4} Q^2$ ausfällt, so läßt sich die Kardani-regel wirklich anwenden.

Also zur Sache!

Es ist hier

$$y = \left\{ \begin{array}{l} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} \\ + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Sub-} \\ \text{sti-} \\ \text{tuirt} \end{array}$$

$$y = \begin{cases} +\sqrt[3]{3306000 + \sqrt{19029636000000 - 71370370}} \\ +\sqrt[3]{3306000 - \sqrt{19029636000000 - 71370370}} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} +\sqrt[3]{3306000 + 3305987} \\ +\sqrt[3]{3306000 - 3305987} \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{6612987} + \sqrt[3]{13} = 187,7 \dots + 2,3 \dots = 190.$$

Nun war vorher $x = y - 60$,

das ist $y = x + 60$

und jetzt $y = 190$

$x + 60 = 190$

$- 60 = 60$

$x = 130 \text{ fl.}$

Die Probe hierüber ist leicht zu machen.

§. 82.

Auch ein kleines Problem für den Selbstfleiß des Lesers, um sich in der Regel des Kardans üben zu können.

Ein Mathematiker traff auf seiner Reise einen Kirchthurm an, der folgende Inschrift hatte: „Wenn man vom 9fachen Quadrate meiner Höhe den Kubus derselben abzieht, so bleibt genau das Quadrat meiner Dicke über.“ Der Reisende maß letztere, und fand sie 80 Schuhe. Wie hoch ist wohl dieser Thurm?

§. 83.

Aufstellung der Regeln meiner neuen Methode, unreine kubische Gleichung leicht aufzulösen.

Erst jetzt, nachdem ich eine Menge unreiner kubischen Gleichungen nach verschiedenen Methoden aufgelöst habe, bin ich in Stand gesetzt, die Theorie meiner neuen Methode in allgemeine Regeln zu bringen, und zu zeigen, worin sie von den bisher bekannten Auflösungsarten abweicht. Man muß zuvor eine hinlängliche Anzahl individueller Fälle bearbeitet haben, um sich zum Speciellen, und dann vollends zum Allgemeinen aufzuschwingen. Umgekehrt geht die Sache, zumal für Anfänger, allemal schwerer.

1. Man bringe die gutgeordnete Gleichung nicht auf Null, sondern lasse das Zahlenglied, besonders wenn es positiv ist, rechter Hand stehen.

2. Haben gähling einige Koefficienten die Bruchform, so giebt es eine eigene Art, die elbe verschwinden zu machen. Sie ist §. 22. gelehrt worden.

3. Man schaffe das Quadratglied, falls eines vorhanden ist, nicht hinaus; ja im Gegentheil, wenn es mangelt, suche man es auf eine vortheilhafte Art nach §. 44. in die Gleichung einzuführen.

4. Die ziemlich schwere Theorie der Wurzelschranken ist hier ganz entbehrlich.

5. Man schicke sich an, die Kubikwurzel beyderseits auszuziehen, und bemerke zugleich linker Hand Mängel und Ueberschuß.

6. Der Mangel wird nach dem ungefähr gefundenen Werth der Wurzel beyderseits addirt, und der Ueberschufs beyderseits subtrahirt.

7. Man urtheile zugleich aus dem Mangel und aus dem Ueberschusse, ob die wahre Wurzel kleiner oder gröfser ausfallen müsse. Denn wird rechter Hand mehr abgezogen, als addirt, so ist dieß ein sicheres Zeichen, daß sich die Wurzel vermindert, und wechselseitig im umgekehrten Falle.

8. Hat man sich der wahren Wurzel durch einen neuen Auszug genähert, so untersuche man bey rationalen Gleichungen, welcher Faktor des ursprünglichen Zahlengliedes der neuen Wurzel am nächsten kömmt.

9. Man ergänze die Gleichung mit diesem Faktor noch einmal, oder stelle sie nach dem Werthe desselben zusammen.

10. Bey irrationalen Gleichungen muß man es auf besagte Art gleichwohl so weit treiben, bis die Wurzel um keine ganze Einheit mehr steigt oder fällt. Sobald dieß geschehen, nehme man $x = n \pm v$ an, wo n die herausgebrachte Zahl, und $\pm v$ einen dazugehörigen, $-v$ aber einen noch fehlenden Bruch bedeutet. Man setze die Gleichung ganz zusammen, und lasse den Kubus des Bruches als unbedeutend hinweg. Die Auflösung der quadratischen Gleichung wird den Dezimalwerth des Bruches v näher bestimmen. Diese Methode kann auch wiederholt werden, um in erforderlichen Fällen mehr Genauigkeit zu erzielen.

II. Ist bey einer gegebenen Gleichung gähling das Zahlenglied gegen die Koefficienten gehalten, sehr klein, so kann es, um sich der wahren Wurzel schnell zu nähern, einen Augenblick weggelassen, die Gleichung um einen Grad erniedrigt, und in diesem Zustande ausgeführt werden.

Die übrigen kleinen Vorthelle, die sich hie und da noch anbringen lassen, lehrt die Erfahrung und ein gewisser spähender Scharfblick, womit ächte Mathematiker ohnehin ausgerüstet seyn müssen.

§. 84.

Noch einen kleinen Vorwurf, den man diesen neu aufgestellten Regeln machen kann, und Beantwortung desselben.

Alles wäre löblich und gut, wenn diese neue Methode, unreine kubische Gleichungen zu behandeln, sich nur nicht so sehr aufs *Versuchen* gründete. Man muß dabey immer rathen, bis die wahre Wurzel erzielt wird. Der Kalkul geht da seinen gesetzten Gang nicht fort, wie man es sonst in der Arithmetik und Algebra zu erfahren gewohnt ist.

Dieser Einwurf läßt sich allerdings schon in der Arithmetik bey solchen Divisionen machen, wo das erste Ziffer klein, und die folgenden groß sind, z. B. 199, oder so was. Man muß auch hier schon durch Versuche ausmitteln, wie oft ein solcher Divisor in der darüberstehenden Zahl immer enthalten ist. Auch

bey Abkürzung der Brüche behilft man sich gewöhnlich mit Versuchen. Noch mehr erweitert sich bekanntlich dieser Spielraum des Rathens beym Ausziehen der Kubikwurzel aus Zahlen, um das zweyte Ziffer der Wurzel richtig zu bestimmen. Wie weit nothwendiger würde erst das Rathen in Hinsicht dieses zweyten Ziffers seyn, wenn man Regeln aufstellen wollte, aus Zahlen die fünfte, siebente oder eilfte Wurzel zu ziehen?

Und zu dem ist ja selbst die ältere Methode, kubische Gleichungen au zu führen, wenn man die Kardaniregel hievon ausnimmt, von diesem Vorwurfe nicht frey. Erfordert denn die Zerfällung des Zahlengliedes in seine Faktoren zwischen den Schranken keine Versuche? Und wenn diese Faktoren alle gefunden sind, muß denn nicht auf ein neues versucht werden, mit welchem Faktor sich so eine rationale Gleichung zusammen setzen läßt? Und wie verhält sich erst die Sache mit irrationalen Gleichungen? Ach, da ist des Versuchens gar kein Ende, zumal, wenn die Wurzelschranken weit auseinander fallen.

Es geht demnach der natürliche Schluß hervor, daß das Versuchen oder Rathen von der ausübenden Mathematik in solchen Fällen nicht wohl getrennt werden könne, wo man mit wenig Aufwand der Zeit und der Geisteskräfte zum Ziele gelangen will; wenn man dabey nur solche Mafsregeln zu geben im Stande ist, daß die Versuche nicht von der Wahrheit abführen, sondern sich mit sichern und schnellen

Schritten ihr nähern. Mich däucht es daher immer rathsamer, mittels einiger weniger Versuche, die durch feste Grundsätze geleitet werden, leicht und schnell zum Ziele gelangen, als das Nämliche auf einen äußerst mühsamen Umweg mit Versplitterung der kostbaren Zeit und Abmattung der Geisteskräfte zu leisten. Salvo meliori!

Einige Berichtigungen.

Seite 16 geht in der 7ten Zeile von unten in dem Ausdrücke

$$\frac{1^3 (D^2 + d D + d^2)}{2 (D - d)}$$

oben im Zähler die letzte Klammer ab.

Seite 30 in der 7ten Zeile von unten lies $3x^2$ statt $3x$

Seite 31 in der 12ten Zeile von oben lies $4x$ statt $4x^2$

In der nämlichen Division müssen auch einmal die Zeichen $-$ $+$ verwechselt werden.

Seite 38 in der 10ten Zeile von unten statt auf lies : auf die.

Seite 51 vor §. 42. setze man : Meistens scheint es aber besser zu seyn, wenn man das negative Zahlenglied rechter Hand stehen läßt.

Seite 86 in der letzten Zeile lies

$$x = \frac{175}{y^2} \text{ statt } x + \frac{175}{y^2}$$

Large English

to be a ... in the ...

in the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

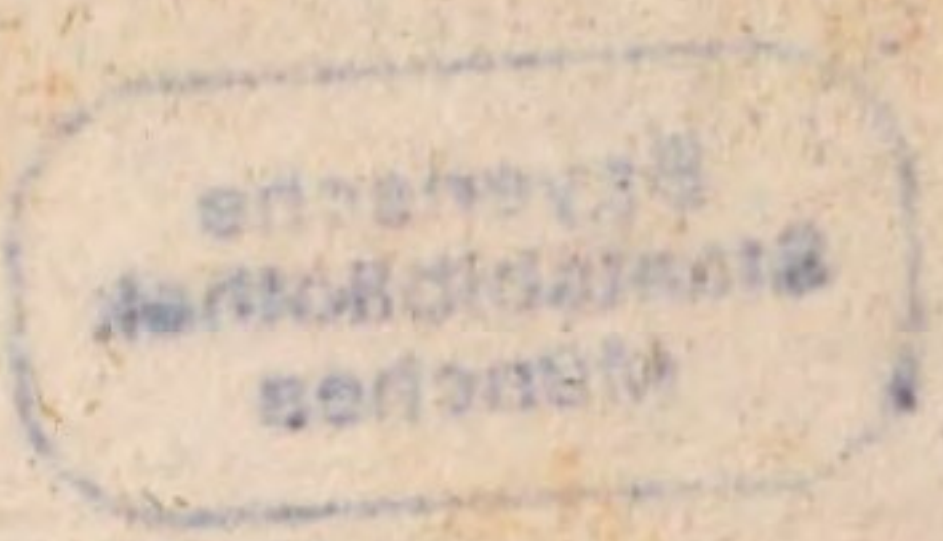
the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...

the ... of the ...



Prädel, Johann Georg,

Sehr faßliche und größtentheils neue Theorie der unreinen kubischen
Gleichungen

München 1809

BHS II K 20

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708107-5